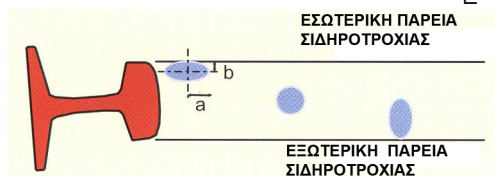


1^ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1^η ΑΣΚΗΣΗ

Σε κανονικού εύρους γραμμή το φορτίο τροχού $Q=11,25t$. Ο ακόλουθος τύπος δίδει την πίεση στο κέντρο της έλλειψης επαφής μεταξύ τροχού σιδηροτροχιάς (βλ. Σχήμα 1):

$$q_0 = \frac{1}{\pi \cdot \mu \cdot \nu} \cdot Q^{1/3} \cdot \left(\frac{E}{1-\sigma^2} \right)^{2/3} \cdot \left[\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2} \right) \right]^{2/3} \quad (1)$$



Σχήμα 1: έλλειψη επαφής μεταξύ τροχού σιδηροτροχιάς

Ο τύπος αυτός απλοποιημένος έχει τη μορφή:

$$q_0 = \frac{187}{\eta} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right)^2} \cdot Q \quad (1a)$$

όπου το η μπορεί να ληφθεί πρακτικά $\eta=1,0495$ με τη μέγιστη απόκλιση $\pm 3,3\%$, ρ_2 η ακτίνα του τροχού και ρ_1 η ακτίνα καμπυλότητας της κεφαλής της σιδηροτροχιάς **σε εκατοστά**.

Η ελλειπτική επιφάνεια δίδεται από τον τύπο:

$$f = \frac{2Q}{q_{\text{επιτρ}}} \quad (2)$$

όπου f σε cm^2 , Q σε kg , q_0 σε kg/cm^2 .

Πίνακας 1

Ρτροχου	Ρεπισωτρου	Ρσιδ/χιας
460mm	-330mm	300mm
460mm	-250mm	200mm
460mm	-300mm	100mm
460mm	-330mm	80mm

Ερώτημα 1^ο Για τιμές καμπυλότητας επισώτρου και σιδηροτροχιάς ως εις τον Πίνακα 1 και επιτρεπόμενη τάση $q_{\text{επιτρ}}=4500\text{kg}/\text{cm}^2$ να υπολογισθεί η μέση πίεση στην έλλειψη επαφής σε σύγκριση με την επιτρεπόμενη. Να υπολογισθεί και η επιφάνεια της έλλειψης επαφής.

Ερώτημα 2^ο Επίσης να υπολογισθεί η μέγιστη τάση διάτμησης που αναπτύσσεται σε βάθος μερικών χιλιοστών από την επιφάνεια επαφής και η οποία είναι η πιο επικίνδυνη:

$$t = 85 \cdot Q^{1/3} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{|\rho_2|} \right) \right]^{1/3} \quad (3)$$

Ο σωστός τύπος είναι αυτός και όχι το $1/r$ εκτός αγκύλης, δεν βγαίνουν οι μονάδες.

r = ακτίνα του τροχού

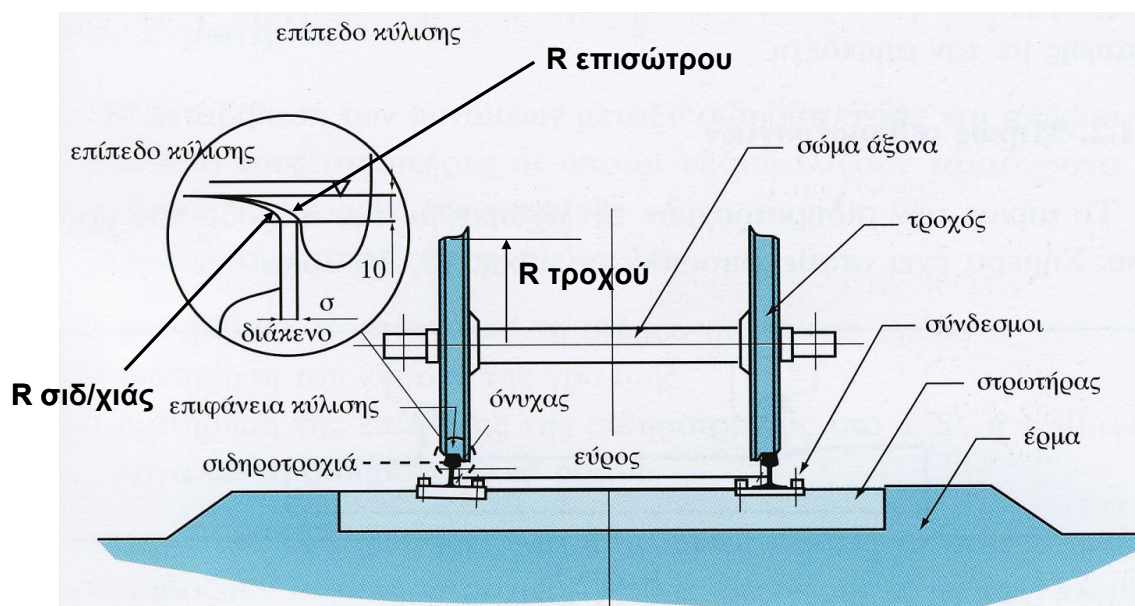
ρ_1 = ακτίνα της εγκάρσιας επιφάνειας της σιδηροτροχιάς

ρ_2 = ακτίνα εγκάρσια του επισώτρου του τροχού σε απόλυτη τιμή

όπου $t_{\text{επιτρ}} = 30 \text{ kg/mm}^2$.

Να υπολογισθεί για κάθε t που θα βρείτε τη σχέση Q/D μεταξύ φορτίου και διαμέτρου του τροχού, όπως προκύπτει από τον τύπο (3).

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 1:



Σχήμα 2: Τροχός – Επίσωτρο – Σιδηροτροχιά, ακτίνες ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 .

Ερώτημα 1 και 2

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιούμε τα δεδομένα της τελευταίας γραμμής του πίνακα:
 $\rho_1 = 80 \text{ mm}$, $\rho_2 = 460 \text{ mm}$.

$$q_0 = \frac{187}{\eta} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right)^2} \cdot Q = \frac{187}{1,0495} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\frac{460}{10}} + \frac{1}{\frac{80}{10}} \right)^2} \cdot 11250 = 1110,73 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$q_0 = 1110,73 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < q_{\text{επιτρεπ.}} = 4500,00 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$f_{\text{έλλειψης}} = \frac{2 \cdot 11250 \text{ kg}}{4500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}} = 5,00 \text{ cm}^2$$

Για το επίσωτρο χρησιμοποιείται η απόλυτη τιμή της ακτίνας του:

$$t = 85 \cdot Q^{1/3} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{|\rho_2|} \right) \right]^{1/3} = 85 \cdot 11.250^{1/3} \cdot \left[\frac{1}{460} \cdot \left(\frac{1}{80} - \frac{1}{330} \right) \right]^{1/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{\text{πραγμ}} = 52,20 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2} > t_{\text{επιτρεπ}} = 30 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$$

Διερεύνηση

$$t = 85 \cdot Q^{1/3} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \right]^{1/3} \Rightarrow t \cdot r^{1/3} = 85 \cdot Q^{1/3} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{1/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Q}{r} \right)^{1/3} = \frac{t}{85 \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{1/3}} \Rightarrow \left[\frac{Q}{r} \right] = \frac{t^3}{85^3 \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)} = \left(\frac{t}{85} \right)^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)}$$

Και γίνεται παραμετρική διερεύνηση από το σπουδαστή για τις πραγματικές τιμές των ρ_i , t που δίδονται στην άσκηση σε σχέση με τις επιτρεπόμενες τιμές του t . Επειδή στον τύπο για το t χρησιμοποιούνται οι ακτίνες της σιδηροτροχιάς και του επισώτρου, άρα και στη διερεύνηση θα χρησιμοποιηθούν αυτές οι ακτίνες.

Π.χ. για $t=30 \text{ kg/mm}^2$, $\rho_{\text{επισώτρου}}= 330 \text{ mm}$ σε απόλυτη τιμή και $\rho_{\text{τροχου}}=80 \text{ mm}$ τότε το δεύτερο σκέλος γίνεται:

$$\left(\frac{t}{85} \right)^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{|\rho_2|} \right)} = \left(\frac{30}{85} \right)^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{80} - \frac{1}{330} \right)} = 4,6427$$

Άρα πρέπει:

$$\frac{Q}{r} \leq 4,6427$$

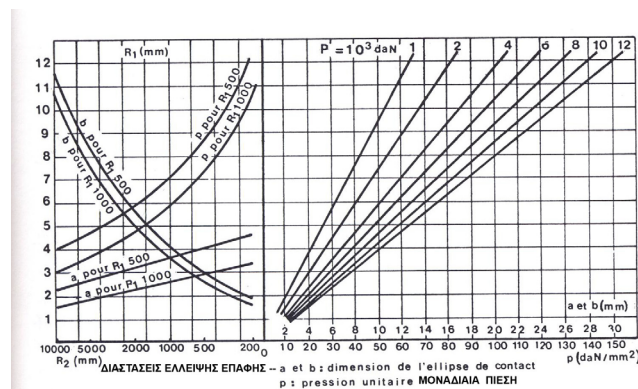
Και στην πραγματικότητα είναι:

$$\frac{Q}{r} \leq \left(\frac{52,20}{85} \right)^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{80} - \frac{1}{330} \right)} = 24,46 > 4,64$$

Αυτό συμβαίνει διότι έχουμε περίπτωση φθαρμένης κεφαλής σιδ/χιάς όπως προκύπτει από την ακτίνα 80 mm.

2^η ΑΣΚΗΣΗ

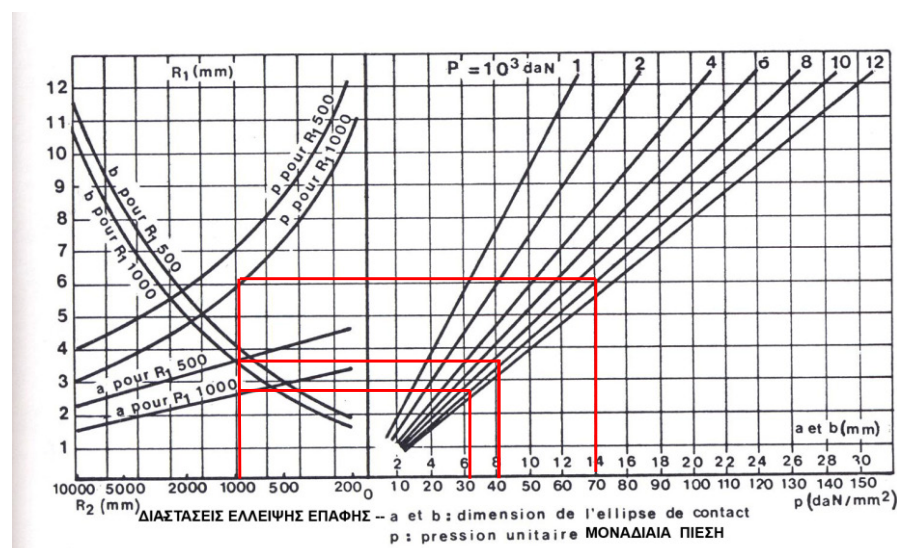
Με βάση το Σχήμα 2 και για τροχό με ακτίνα $R_2=1000\text{mm}$ και $R_1=1000\text{mm}$ να υπολογισθούν :



Σχήμα 2: Διαγράμματα του Hertz κατά Gonnou [Alias 1987] – από τα Γαλλικά pour = για, et= και. Κλείδα: Με δεδομένη την R_2 χαράσσουμε την αντιστοιχούσα κατακόρυφη. Τα σημεία τομής αυτής της καθέτου με τις καμπύλες που δίδουν a , b , και p για τη θεωρούμενη διάμετρο τροχού, χαράσσονται οι οριζόντιες μέχρι τα σημεία τομής με την επιλεγείσα ευθεία P . Οι συντεταγμένες αυτών των σημείων τομής δίδουν τις τιμές a , b , και p .

Οι ημιάξονες της έλλειψης επαφής a , b και η μέση πίεση στην έλλειψη επαφής τροχού σιδηροτροχιάς p , για στατικό φορτίο τροχού $P= 10 \text{ t}$ και 12 t .

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 2:



3^η ΑΣΚΗΣΗ

Σας δίδεται απόσπασμα των Σημειώσεων του προηγούμενου μαθήματος:

«2.7.- Επιλογή τύπου σιδηροτροχιάς

Υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία διάφορες μέθοδοι υπολογισμού των τάσεων σιδηροτροχιάς υπό τα φορτία κυκλοφορίας. Όμως ο πιο απλός και αξιόπιστος τύπος είναι αυτός που προτάθηκε στο συνέδριο του Καϊρου της AICCF¹ [Alias 1987]:

$$P = 2,5 \cdot Q \quad (9)$$

Όπου το P είναι το ανά μέτρο μήκους βάρος της σιδηροτροχιάς σε κιλά και Q το φορτίο ανά άξονα του οχήματος.

Ο πλέον διαδεδομένος τύπος για τον υπολογισμό της αντίδρασης του στρωτήρα, είναι ο τύπος του Zimmermann ο οποίος δίδει:

$$\sigma = \frac{Q \cdot v}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{E \cdot \ell}{I^3 \cdot \rho} \right)^{1/4} \quad (10)$$

Όπου:

σ η τάση σε kg/mm^2

Q το φορτίο του τροχού σε kg

E συντελεστής ελαστικότητας του χάλυβα 22000 kg/mm^2

ℓ απόσταση στρωτήρων (π.χ. 600 mm)

I ροπή αδρανείας κατακόρυφη της σιδηροτροχιάς σε mm^4

V η απόσταση της βάσης της σιδηροτροχιάς από τον ουδέτερο άξονά της σε mm

ρ η ακαμψία της έδρασης (συντελεστής αντίδρασης του στρωτήρα)

Λαμβάνοντας $\rho = 40 \text{ kN/mm}$ που είναι μια μέτρια έδραση γραμμής και $\sigma = 7,5 \text{ kg/mm}^2$ που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σε μέτριες εδράσεις γραμμής, βρίσκουμε:

$$Q = 2,799 \cdot \frac{I^{3/4}}{v} \quad (11)$$

Ο πίνακας 2 δίδει τα μέγιστα φορτία για έδραση με $\rho = 40 \text{ kN/mm}$, και σιδηροτροχιές UIC54 και UIC60 που χρησιμοποιούνται διεθνώς και στην Ελλάδα, όπως και της βαρύτερης σιδηροτροχιάς UIC71 [Alias 1987]:

Πίνακας 2: Μέγιστο φορτίο τροχού για σιδηροτροχιές για ρ υποδομής $= 40 \text{ kN/mm}$

Τύπος σιδ/χιάς	Ροπή Αδρανείας [mm^4]	v [mm]	$2Q$ φορτίο άξονα [t]
UIC 54	23.460.000	76,20	24,76

¹ Association Internationale de Cooperation des Chemins de Fer

UIC 60	30.550.000	80,96	28,41
UIC 71	41.520.000	83,04	34,87

Ο πίνακας αυτός δίδει μια σχέση περίπου:

$$P_{[kg]} = 2,25 \cdot Q_{[t]} + 3 \quad (12)»$$

Το αξονικό φορτίο (φορτίο άξονα σιδηροδρομικού οχήματος) κανονικής γραμμής (διεθνούς εύρους 1435 mm) είναι $Q=22,5$ t.

ΖΗΤΕΙΤΑΙ:

(α) να επαληθεύσετε τα στοιχεία του πίνακα,

(β) να βρείτε τις αντίστοιχες σχέσεις για τιμές του ρ :
 40, 60, 80, 100, 250 kN/mm

(γ) να συγκρίνετε τις τιμές με τον τύπο της AICCF

Για τους τρεις τύπους σιδηροτροχιών

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 3:

(α) Έχουμε τα δεδομένα:

σ η τάση σε kg/mm^2 κατά τα δεδομένα της άσκησης = $7,5 \text{ kg/mm}^2 = 75 \text{ N/mm}^2$.

Q το φορτίο του τροχού σε kg θα υπολογισθεί από μετασχηματισμό του τύπου (9) στον τύπο (10)

E συντελεστής ελαστικότητας του χάλυβα $22.000 \text{ kg/mm}^2 = 220.000 \text{ N/mm}^2$

ℓ απόσταση στρωτήρων (π.χ. 600 mm)

I ροπή αδρανείας κατακόρυφη της σιδηροτροχιάς σε mm^4

v η απόσταση της βάσης της σιδηροτροχιάς από τον ουδέτερο άξονά της σε mm

ρ η ακαμψία της έδρασης (συντελεστής αντίδρασης του στρωτήρα)

Λαμβάνοντας $\rho = 40 \text{ kN/mm} = 40.000 \text{ N/mm}$ που είναι μια μέτρια έδραση γραμμής, βρίσκουμε:

$$\sigma = \frac{Q \cdot v}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{E \cdot \ell}{I^3 \cdot \rho} \right)^{1/4} \Rightarrow Q = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sigma}{v} \cdot \left(\frac{I^3 \cdot \rho}{E \cdot \ell} \right)^{1/4} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{2\sqrt{2} \cdot 75 \frac{N}{mm^2}}{v[mm]} \cdot \left(\frac{I^3 \cdot 40.000 \frac{N}{mm}}{220.000 \frac{N}{mm^2} \cdot 600mm} \right)^{1/4} \Rightarrow$$

$$Q = \left(2^4 \cdot 2^2 \cdot 75^4 \frac{N^4}{mm^8} \cdot \frac{40.000}{220.000 \cdot 600} \cdot \frac{I^3 [mm^4]^3}{v^4 [mm^4]} \right)^{1/4} \Rightarrow$$

$$Q = \left(2^4 \cdot 2^2 \cdot 75^4 \frac{N^4}{mm^4 \cdot mm^4} \cdot \frac{40.000}{220.000 \cdot 600} \cdot \frac{I^3 [mm^4]^3}{v^4 [mm^4]} \right)^{1/4} \Rightarrow$$

$$Q = \left(2^4 \cdot 2^2 \cdot 75^4 [N^4] \cdot \frac{40.000}{220.000 \cdot 600} \cdot \frac{I^3}{v^4} \right)^{1/4} \Rightarrow$$

$$Q = \left(2^4 \cdot 2^2 \cdot 75^4 \cdot \frac{40.000}{220.000 \cdot 600} \right)^{1/4} \cdot \frac{I^{3/4}}{v} [N] \Rightarrow ()$$

$$Q = \frac{1}{10} \left(2^4 \cdot 2^2 \cdot 75^4 \cdot \frac{40.000}{220.000 \cdot 600} \right)^{1/4} \cdot \frac{I^{3/4}}{v} [kg] =$$

$$Q = \frac{1}{10} (613.636,3636)^{1/4} \cdot \frac{I^{3/4}}{v} [kg] = \frac{1}{10} \cdot 27,9884 \cdot \frac{I^{3/4}}{v} [kg] = 2,799 \cdot \frac{I^{3/4}}{v} [kg]$$

Επαληθεύσαμε και με μονάδες τον εμπειρικό τύπο (11).

Από τον τύπο (11) και για τις τιμές του παραπάνω πίνακα, επαληθεύουμε:

Για σιδηροτροχιά UIC54 υπολογίζουμε: $2Q = 24.764 \text{ kg}$

Για σιδηροτροχιά UIC60 υπολογίζουμε: $2Q = 28.413 \text{ kg}$

Για σιδηροτροχιά UIC71 υπολογίζουμε: $2Q = 34.869 \text{ kg}$

(β) Ως παράδειγμα κάνουμε υπολογισμό για $\rho = 250 \text{ kN/mm}$

$$Q = \frac{2\sqrt{2} \cdot 75 \frac{N}{mm^2}}{v [mm]} \cdot \left(\frac{I^3 \cdot 250.000 \frac{N}{mm}}{220.000 \frac{N}{mm^2} \cdot 600 mm} \right)^{1/4} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{1}{10} \left(2^4 \cdot 2^2 \cdot 75^4 \cdot \frac{250.000}{220.000 \cdot 600} \right)^{1/4} \cdot \frac{I^{3/4}}{v} [kg] =$$

$$Q = \frac{1}{10} (3.835.227,273)^{1/4} \cdot \frac{I^{3/4}}{v} [kg] = \frac{1}{10} \cdot 44,2535 \cdot \frac{I^{3/4}}{v} [kg] = 4,425 \cdot \frac{I^{3/4}}{v} [kg]$$

Οπότε υπολογίζουμε τις νέες τιμές για τον πίνακα 2^α:

Πίνακας 2α: Μέγιστο φορτίο τροχού για σιδηροτροχιές για ρ υποδομής = 250 kN/mm

Τύπος σιδ/χιάς	Ροπή Αδρανείας [mm ⁴]	v [mm]	$2Q$ φορτίο άξονα [t]
UIC 54	23.460.000	76,20	39,15
UIC 60	30.550.000	80,96	44,92
UIC 71	41.520.000	83,04	55,13

Είναι προφανές ότι οι τιμές του πίνακα 2α δεν είναι ρεαλιστικές με δεδομένα ότι: Οι τιμές του $\rho_{ολικο}$ που πρέπει να χρησιμοποιούμε (και όχι του $\rho_{υποδομής}$ που δόθηκε ως εκπαιδευτικό παράδειγμα) είναι μικρότερες από 40 kN/mm για καλές γραμμές ενώ για γραμμές χωρίς ελαστικούς συνδέσμους μπορεί να φθάσει έως 140 kN/mm σε οριακές περιπτώσεις.

Στην πράξη κατά μήκος της γραμμής έχουμε πάντοτε εναλλασσόμενο $\rho_{ολικο}$ αφού η γραμμή διέρχεται και από βραχύδεις περιοχές (όπου στη διαμόρφωσή του συμμετέχει $\rho_{υποδομής}=100-250$ kN/mm) αλλά και σε περιοχές με «μαλακά» εδάφη (όπου στη διαμόρφωσή του συμμετέχει $\rho_{υποδομής}=20-40$ kN/mm, δηλαδή υποδομή αργιλώδης ή χαλικώδης).

(γ).- Από τον τύπο (9), για $Q=22,5t$:

$P_{[kg]}=2,5 \cdot 22,5= 56,25$ kg/m σιδηροτροχιά άρα από τον παραπάνω πίνακα σιδηροτροχιά UIC60 δηλαδή 60kg/m > 56,25 kg/m

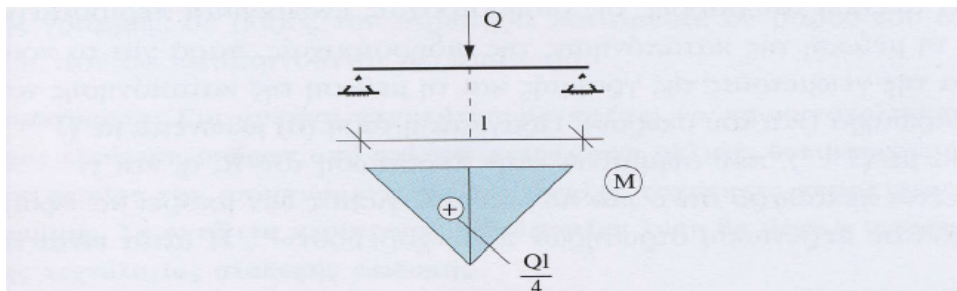
Από τον τύπο (12), για $Q=22,5t$:

$P_{[kg]}=2,25 \cdot 22,5+3= 53,625$ kg/m σιδηροτροχιά άρα από τον παραπάνω πίνακα σιδηροτροχιά UIC54 δηλαδή 54kg/m > 53,625 kg/m

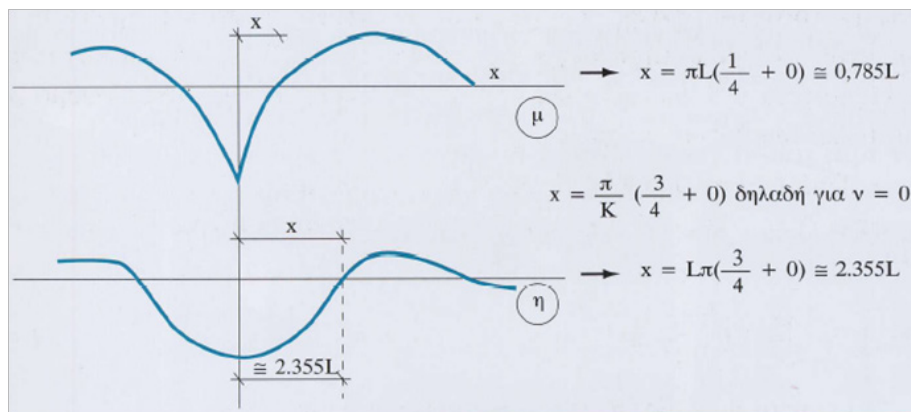
Από τους δύο τύπους ο (9) δίνει δυσμενέστερα αποτελέσματα, συνεπώς επιλέγουμε σιδηροτροχιά UIC60, δηλαδή βάρους ανά μέτρο μήκους 60 kg/m.

ΑΣΚΗΣΗ 4^η : Σημείο μηδενισμού στη γραμμή

Προσομοίωση σιδηροτροχιάς ως δοκού:



Σχήμα 1 Δοκός με φορτίο στη μέση του ανοίγματος, διάγραμμα ροπής



Σχήμα 2 θέσεις μηδενισμού των συναρτήσεων μ και η (κάτω η συνάρτηση μ)

Αν από τη μέτρηση της ροπής M το σημείο μηδενισμού της είναι στη θέση $x=\lambda$, όπου:

$$L = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot E \cdot J}{U}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot E \cdot J \cdot \ell}{\rho}} \quad (1) \rightarrow$$

$$\lambda = \frac{\pi}{4} \cdot L \quad (2)$$

και

$$U = \frac{\pi^4 \cdot E \cdot J}{4^3 \cdot \lambda^4} \quad (3)$$

Να υπολογισθεί το $\rho_{ολικό}$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 4:

Η καμπύλη μηδενίζεται στις θέσεις:

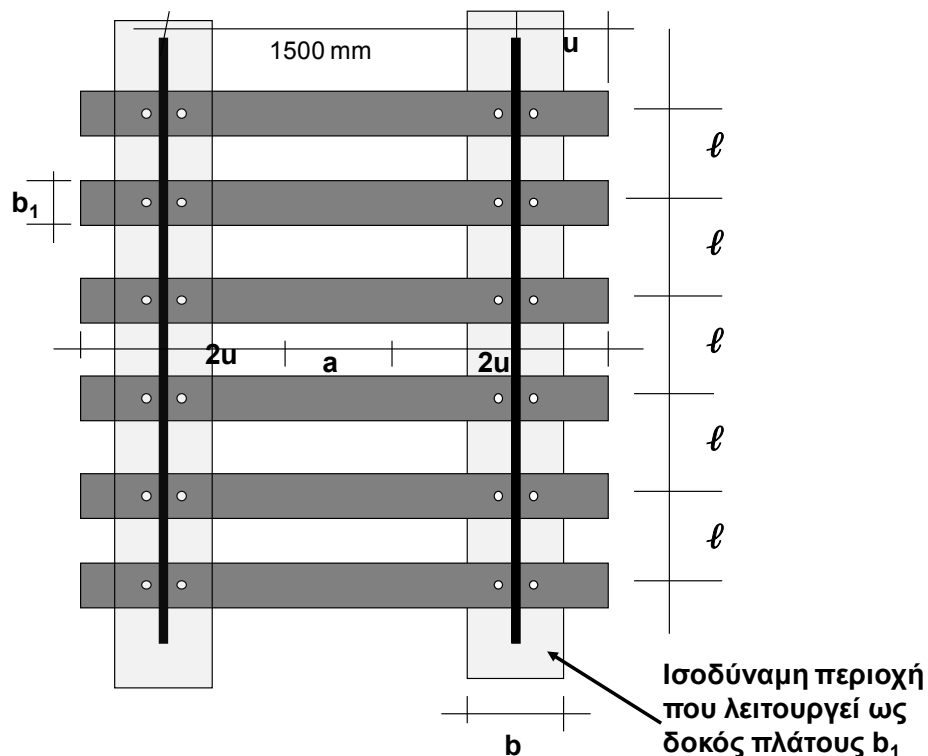
$$x = \frac{\pi}{K}(\frac{1}{4} + 0), \text{ δηλ. για } v = 0 \text{ και επειδή } \frac{1}{K} = L \rightarrow x = \pi L(\frac{1}{4} + 0)$$

σε ένα μήκος

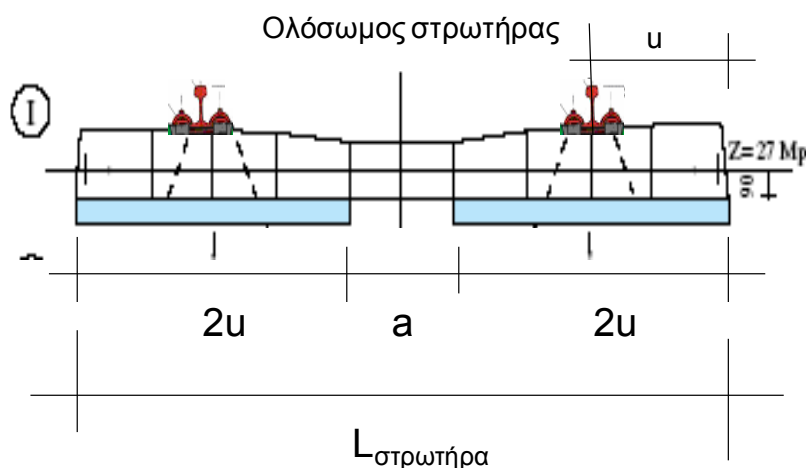
$$\lambda = \frac{\pi}{4} \cdot L = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{4 \cdot \ell \cdot E \cdot J}{\rho}} \rightarrow \lambda^4 = \frac{\pi^4}{4^4} \cdot \frac{4 \cdot \ell \cdot E \cdot J}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{\pi^4 \cdot E \cdot \ell \cdot J}{4^3 \cdot \lambda^4}$$

εάν επί γραμμής μετρήσουμε το λ υπολογίζουμε το συντελεστή δυσκαμψίας της γραμμής $\rho_{ολικό}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ (ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ) ΜΗΚΟΥΣ L .



ΣΧΗΜΑ 1: Εσχάρα γραμμής σε οριζοντιογραφία, σιδηροτροχιές (μαύρες), στρωτήρες ολόσωμοι (γκρι) και σύνδεσμοι (άσπροι). Με ανοιχτότερο γκρί η «ισοδύναμη δοκός» κάτω από κάθε σιδηροτροχιά. b_1 το πλάτος του στρωτήρα, b το πλάτος της ισοδύναμης περιοχής που λειτουργεί ως δοκός κατά μήκος της σιδηροτροχιάς, l η απόσταση των στρωτήρων, a το μήκος της αφόρτιστης περιοχής στο κέντρο του, u η απόσταση του κατά μήκος άξονα της σιδηροτροχιάς από την έξω πλευρική παρειά του στρωτήρα και $2u$ το μήκος της ενεργής επιφάνειας του ημιστρωτήρα.



ΣΧΗΜΑ 2: Ολόσωμος στρωτήρας σε όψη με σιδηροτροχιές και συνδέσμους, πλάτους b κατά την εγκάρσια προς το σχήμα έννοια, u η απόσταση του άξονα της σιδηροτροχιάς από την εξωτερική πλευρική παρειά του στρωτήρα, $2u$ το μήκος της ενεργής επιφάνειας του ημιστρωτήρα, a το μήκος της αφόρτιστης περιοχής στο κέντρο του, $L_{\text{στρωτήρα}}$ το μήκος του στρωτήρα.

Εξ ορισμού ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις όπως προκύπτει από το Κεφάλαιο 2 του βιβλίου «Δράσεις στη Σιδηροδρομική Γραμμή».

$$C = \frac{P}{y} = \frac{\rho_{ολικό}}{F_{ενεργή}}, \quad q = U \cdot y, \quad q = \frac{R}{\ell}, \quad p = \frac{R}{F_{ενεργή}} \quad (1)$$

Όπου C συντελεστής εδάφους [N/mm³], p η μέση πίεση [N/mm²], y η υποχώρηση (βύθιση) [mm], R η αντίδραση/δράση επί ενός στρωτήρα [N], q η ανά μονάδα μήκους της γραμμής αντίδραση/δράση [N/mm], F_{ενεργή} η ενεργή επιφάνεια του ημιστρωτήρα (αν εξετάζουμε ανά σιδηροτροχιά), ℓ η απόσταση μεταξύ των στρωτήρων [mm], U το μέτροι ελαστικότητας του σκύρου ή μέτρο ελαστικότητας γραμμής [N/mm²].

Το ισοδύναμο (ή ελαστικό) μήκος L της γραμμής δίδεται θεωρητικά, κατά τον Zimmermann, από τον παρακάτω τύπο (2), [βλ. σελ 75]:

$$L = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot E \cdot J \cdot \ell}{b \cdot C \cdot u}} \quad (2)$$

Όπου E, J το μέτρο ελαστικότητας και η ροπή αδρανείας της σιδηροτροχιάς [σε N/mm² και mm⁴ αντίστοιχα], C, ℓ ως άνω εξίσωση (1), b το πλάτος της ισοδύναμης λωρίδας κάτω από τη σιδηροτροχιά [mm], 2u το μήκος της ενεργής ημιεπιφάνειας του ημιστρωτήρα [mm] όπως στα σχήματα 1 και 2.

Η ενεργή ημι-επιφάνεια έδρασής του είναι:

$$F_{ενεργή} = u \cdot b_1 \quad (3)$$

Ο ημιστρωτήρας έχει ενεργή επιφάνεια έδρασης F_{ενεργή} που είναι ίση με την επιφάνεια της ισοδύναμης περιοχής που λειτουργεί ως δοκός πλάτους b₁ και μήκους (μεταξύ δύο διαδοχικών στρωτήρων) ℓ. Επιπλέον το μήκος της ενεργής ημι-επιφάνειας του ημιστρωτήρα u είναι ίσο με την απόσταση του κατά μήκος άξονα της σιδηροτροχιάς (βλ. Σχήμα 2) από την εξωτερική πλευρική επιφάνεια του στρωτήρα.

$$L_{στρωτήρα} = 2 \cdot (2 \cdot u) + a = 1500 + 2 \cdot u \quad (4)$$

Όπου 1500 mm είναι με πολύ μικρή προσέγγιση (με αρκετή ακρίβεια) η απόσταση των αξόνων των δύο σιδηροτροχιών για κανονικού εύρους γραμμή, (εύρος κανονικής γραμμής e=1435 mm).

Η ανάλυση κατά Zimmermann, εξισώνει την ενεργή επιφάνεια του ημιστρωτήρα με την λωρίδα περί ένα στρωτήρα:

$$b \cdot \ell = 2 \cdot u \cdot b_1 \Rightarrow \ell \approx 2 \cdot u \quad (5)$$

θεωρώντας ότι ισχύει:

$$b \approx b_1 \quad (6)$$

και συνεπώς το ισοδύναμο (ελαστικό) μήκος της γραμμής L , από την εξίσωση (2) δίδεται προσεγγιστικά από την εξίσωση (7):

$$L = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot E \cdot J}{b \cdot C}} \quad (7)$$

Όμως στην πραγματικότητα εξαρτάται –η ισχύς της εξίσωσης των b , b_1 - από το στρωτήρα.

Για απόσταση στρωτήρων $\ell=60$ cm, $E=2.100.000$ kg/cm², $J=3,06 \cdot 10^7$ mm⁴ και $\rho_{ολικο}=100$ kN/mm

ΖΗΤΕΙΤΑΙ:

1.- Να βρείτε το ισοδύναμο (ελαστικό) μήκος της γραμμής L ως συνάρτηση του συντελεστή συνολικής δυσκαμψίας της γραμμής $\rho_{ολικο}$ και της απόστασης των στρωτήρων ℓ . Κατά τη διάρκεια υπολογισμού του να χρησιμοποιήσετε και την προσέγγιση της εξίσωσης (6), ώστε να βρείτε το $L_{ΑΚΡΙΒΕΣ}$ και το $L_{ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ}$.

2.- Στη συνέχεια για μήκη ολόσωμων στρωτήρων 2,30 m - 2,40 m - 2,50 m και 2,60 m, να διερευνήσετε το θέμα σχέσεων b , b_1 , και την επιρροή στην προσέγγιση $L_{ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ}$ προς το $L_{ΑΚΡΙΒΕΣ}$.

Μήκος m	Ενεργή επιφάνεια cm ²
2,30	4420
2,40	5190
2,515	5359,2
2,60	5700

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 5:

1.-

$$L = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot E \cdot J \cdot \ell}{b \cdot C \cdot u}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot E \cdot J \cdot \ell}{b \cdot \frac{\rho_{ολικο}}{F_{ενεργη}} \cdot u}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot E \cdot J \cdot \ell}{b \cdot \frac{\rho_{ολικο}}{b_1 \cdot 2u}} \cdot u} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot E \cdot J \cdot \ell}{b \cdot \frac{\rho_{ολικο}}{b_1}}}$$

αν $b=b_1$ τότε:

$$L = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot E \cdot J \cdot \ell}{\rho_{ολικο}}}$$

2.- Η διερεύνηση θα γίνει για να δούμε πόσο ακριβής είναι η υπόθεση $b=b_1$. Θα το κάνουμε για τις 4 περιπτώσεις των στρωτήρων.

α) Μήκος 2,30 μ δηλαδή ενεργό ημιμήκος $2u=2300-1500= 800$ χιλ. Άρα

$$b_1 = \frac{\frac{442000}{2}}{800} = 276,25mm$$

άρα

$$b = \frac{\frac{442000}{2}}{600} = 368,33mm$$

άρα η επιρροή της διαφοράς b και b_1 στο μήκος L είναι:

$$L_{AKRIBES} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 210000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,06 \cdot 10^7 mm^4 \cdot 600mm}{100000 \frac{N}{mm} \cdot \frac{368,33mm}{276,25mm}}} = 583,18mm$$

$$L_{ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 210000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,06 \cdot 10^7 mm^4 \cdot 600mm}{100000 \frac{N}{mm}}} = 626,67mm$$

Άρα:

$$\frac{L_{ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ}}{L_{AKRIBES}} = 1,075$$

β) Μήκος 2,40 μ δηλαδή ενεργό ημιμήκος $2u=2400-1500= 900$ χιλ. Άρα

$$b_1 = \frac{\frac{519000}{2}}{900} = 288,33mm$$

άρα

$$b = \frac{\frac{519000}{2}}{600} = 432,5mm$$

άρα η επιρροή της διαφοράς b και b_1 στο μήκος L είναι:

$$L_{\text{ΑΚΡΙΒΕΣ}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 210000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,06 \cdot 10^7 mm^4 \cdot 600 mm}{100000 \frac{N}{mm} \cdot \frac{432,5 mm}{288,33 mm}}} = 566,26 mm$$

$$L_{\text{ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 210000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,06 \cdot 10^7 mm^4 \cdot 600 mm}{100000 \frac{N}{mm}}} = 626,67 mm$$

Άρα:

$$\frac{L_{\text{ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ}}}{L_{\text{ΑΚΡΙΒΕΣ}}} = 1,107$$

γ) Μήκος 2,515 μ δηλαδή ενεργό ημιμήκος $2u=2515-1500= 1015$ χιλ. Άρα

$$b_1 = \frac{\frac{535920}{2}}{1015} = 264,00 mm$$

άρα

$$b = \frac{\frac{535920}{2}}{600} = 446,6 mm$$

άρα η επιρροή της διαφοράς b και b₁ στο μήκος L είναι:

$$L_{\text{ΑΚΡΙΒΕΣ}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 210000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,06 \cdot 10^7 mm^4 \cdot 600 mm}{100000 \frac{N}{mm} \cdot \frac{446,6 mm}{264,00 mm}}} = 549,49 mm$$

$$L_{\text{ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 210000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,06 \cdot 10^7 mm^4 \cdot 600 mm}{100000 \frac{N}{mm}}} = 626,67 mm$$

Άρα:

$$\frac{L_{\text{ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ}}}{L_{\text{ΑΚΡΙΒΕΣ}}} = 1,14$$

δ) Μήκος 2,6 μ δηλαδή ενεργό ημιμήκος $2u=2600-1500= 1100$ χιλ. Άρα

$$b_1 = \frac{\frac{570000}{2}}{1100} = 259,09mm$$

άρα

$$b = \frac{\frac{570000}{2}}{600} = 475,0mm$$

άρα η επιρροή της διαφοράς b και b_1 στο μήκος L είναι:

$$L_{\text{ΑΚΡΙΒΕΣ}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 210000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,06 \cdot 10^7 mm^4 \cdot 600mm}{100000 \frac{N}{mm} \cdot \frac{475,00mm}{259,09mm}}} = 538,55mm$$

$$L_{\text{ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 210000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,06 \cdot 10^7 mm^4 \cdot 600mm}{100000 \frac{N}{mm}}} = 626,67mm$$

Άρα:

$$\frac{L_{\text{ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟ}}}{L_{\text{ΑΚΡΙΒΕΣ}}} = 1,164$$

Συνεπώς η ακρίβεια μειούται με την αύξηση του μήκους του στρωτήρα, αλλά πάντως είναι κοντά στην πραγματικότητα (μέγιστη απόκλιση 16%).

ΑΣΚΗΣΗ 6: ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ΕΛΑΦΟΥΣ C [N/mm³]

Ο συντελεστής δυσκαμψίας (ελατηριακή σταθερά) $\rho_{\text{ολικο}}$ της γραμμής δίδεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{1}{\rho_{\text{ολικο}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{\rho_{\text{σιδ/γιας}}} + \frac{1}{\rho_{\text{υποθεματος}}} + \frac{1}{\rho_{\text{στρωτηρα}}} + \frac{1}{\rho_{\text{σκυρου}}} + \frac{1}{\rho_{\text{υποδομης}}} \quad (1)$$

και ο συντελεστής εδάφους C από την εξίσωση:

$$C = \frac{\rho_{ολικο}}{F_{ενεργη}} \quad (2)$$

όπου $F_{ενεργη}$ είναι η ενεργή επιφάνεια έδρασης του στρωτήρα.

Αν:

$\rho_{σιδ/χιας} = 75000 \text{ kN/mm}$

$\rho_{υποθέματος} = 600 \text{ kN/mm}$ (σύνδεσμος K ή W1) και 50 kN/mm (σύνδεσμος W14)

$\rho_{σκύρου} = 380 \text{ kN/mm}$

$\rho_{υποδομής} = 100 \text{ kN/mm}$

και για τους ακόλουθους τύπους στρωτήρων:

Υλικό στρωτήρα	Μήκος [m]	Ενεργή επιφάνεια [cm ²]	Συντελεστής $\rho_{στρωτ}$ [kN/mm]
Μπετόν	2,60	5700,00	13500
Ξύλο	2.60	5500,00	800
Ξύλο	2,50	5288,46	800
Χάλυβας	2,60	5324,80	7500
Χάλυβας	2,45	4989,60	7500

Να υπολογισθεί το C.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 6

Παράδειγμα επίλυσης για στρωτήρα από μπετόν μήκους 2,60 m.

$$\frac{1}{\rho_{ολικο}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{75.000} + \frac{1}{600} + \frac{1}{13500} + \frac{1}{380} + \frac{1}{100} = 0,014385653 \Rightarrow \rho_{ολικο} = 69,51 \text{ kN / mm}$$

$$C = \frac{69510 \frac{N}{mm}}{570000 mm^2} = 0,122 \frac{N}{mm^3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗΣ R ΚΑΙ ΒΥΘΙΣΗΣ y

Για τα δεδομένα της άσκησης 2 (προηγούμενη άσκηση) και για: φορτίο $Q=22,5 \text{ t/άξονα}$, για απόσταση στρωτήρων $\ell=60 \text{ cm}$, $E=2.100.000 \text{ kg/cm}^2$, $J=3,06 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$, να υπολογισθούν η αντίδραση $R_{\max}$ και η βύθιση $y_{\max}$ από τοις ακόλουθες εξισώσεις:

$$R_{\max} = \frac{Q_{\text{τροχού}}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \cdot \rho_{\text{ολικό}}}{E \cdot J}}$$

$$y_{\max} = \frac{Q_{\text{τροχού}}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3}{E \cdot J \cdot \rho_{\text{ολικό}}^3}}$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 7

Πάλι ως παράδειγμα επιλύουμε την περίπτωση ολόσωμου στρωτήρα από μπετόν:

$$\rho_{\text{ολικό}} = 69,51 \text{ kN/mm}$$

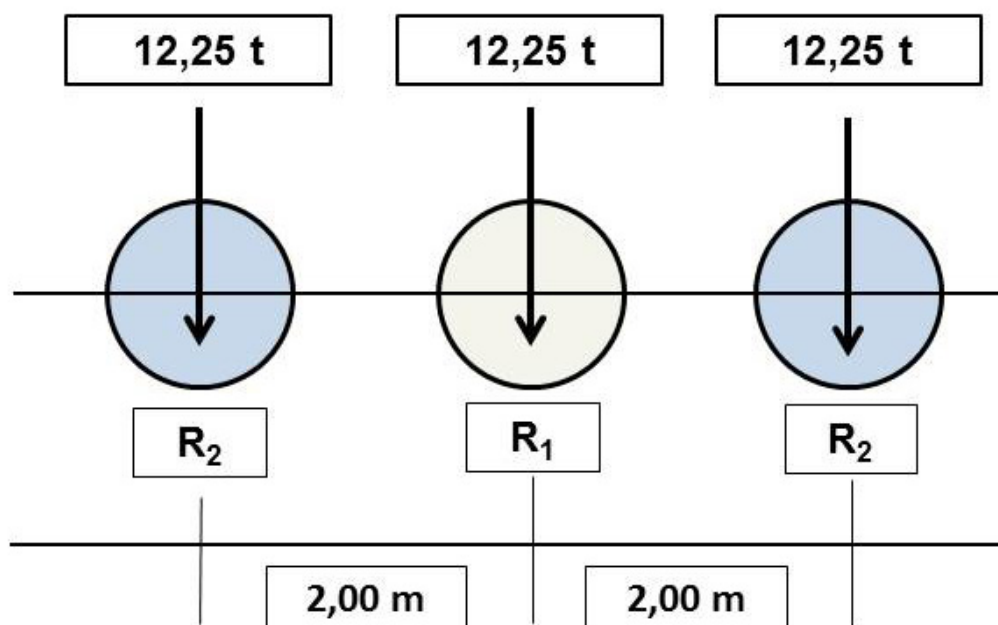
$$R_{\max} = \frac{112500 \text{ N}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{600^3 \text{ mm}^3 \cdot 69510 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}{2.100.000 \cdot \frac{10}{100} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 3,06 \cdot 10^7 \text{ mm}^4}} = \frac{112500}{2\sqrt{2}} \cdot 1,236346147 [\text{N}] \Rightarrow$$

$$R_{\max} = 0,437114372 \cdot 112,5 [\text{N}] = 49,18 \text{ kN}$$

$$y_{\max} = \frac{Q_{\text{τροχού}}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3}{E \cdot J \cdot \rho_{\text{ολικό}}^3}} = \frac{112500 \text{ N}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{600^3 \text{ mm}^3}{2.100.000 \cdot \frac{10}{100} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 3,06 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \cdot 69510^3 \frac{\text{N}^3}{\text{mm}^3}}} \Rightarrow$$

$$y_{\max} = \frac{112500 \text{ N}}{2\sqrt{2}} \cdot 1,778659397 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mm}}{\text{N}} = 0,71 \text{ mm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8: ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΦΟΡΤΙΩΝ



Για το τριαξονικό φορείο του Σχήματος να υπολογισθεί η αντίδραση R ακριβώς κάτω από το πρώτο φορτίο R_2 λαμβάνοντας υπ’ όψη την επίδραση και των δύο άλλων φορτίων από τον τύπο:

$$R_i = \frac{Q \cdot K \cdot \ell}{2} \cdot \eta(x), \quad R_{ολικό} = \sum_{i=1}^3 R_i$$

όπου

$$\eta(x) = e^{-Kx} \cdot [\sin(Kx) + \cos(Kx)]$$

$$K = \frac{1}{L}, \quad L = \sqrt[4]{\frac{4EJ\ell}{\rho_{ολικό}}}$$

Αφού σχεδιάσετε την $\eta(x)$ και βρείτε τις αντίστοιχες τιμές.

Δίδονται: $\ell=600$ mm, $E=2.100.000$ kg/cm², $J=3,06 \cdot 10^7$ mm⁴, $\rho_{ολικό}= 30$ kN/mm.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 8

$$K = \sqrt[4]{\frac{\rho_{ολικό}}{4 \cdot E \cdot J \cdot \ell}} = \sqrt[4]{\frac{30.000 \frac{N}{mm}}{4 \cdot 210.000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,06 \cdot 10^7 mm^4 \cdot 600 mm}} = 0,001180979 mm^{-1}$$

$$L = \frac{1}{K} = 846,75482 mm$$

Πίνακας 1²: Υπολογισμός τιμών $\eta(x)$

$\eta(x)$	Kx	e^{-Kx}	$x=k\pi/(4K)$ [mm]	Διακυμανση π	$k\pi/4$
-3.48734E-06	-12.56636	-3.48738E-06	-10640.6259	16π/4	-12.56636
1.0764E-10	11.7809625	-7.64879E-06	-9975.58677	15π/4	11.7809625
1.67761E-05	-10.995565	-1.67759E-05	-9310.54765	14π/4	-10.995565
5.2035E-05	10.2101675	-3.67943E-05	-8645.50854	13π/4	10.2101675
8.06995E-05	-9.42477	-8.07002E-05	-7980.46942	12π/4	-9.42477
-1.82663E-09	-8.6393725	-0.000176998	-7315.4303	11π/4	-8.6393725
-0.000388208	-7.853975	-0.000388206	-6650.39118	10π/4	-7.853975
-0.001204123	-7.0685775	-0.000851443	-5985.35206	9π/4	-7.0685775
-0.001867443	-6.28318	-0.001867453	-5320.31294	8π/4	-6.28318
2.68986E-08	-5.4977825	-0.004095844	-4655.27383	7π/4	-5.4977825

² όπου $-2,666 \cdot 10^{-7} \sim 0,000$ προσέγγιση λόγω ακριβείας πράξεων. Οι πολύ μικροί αριθμοί είναι σημεία μηδενισμού της συνάρτησης: βλ. σελ. 74 του βιβλίου.

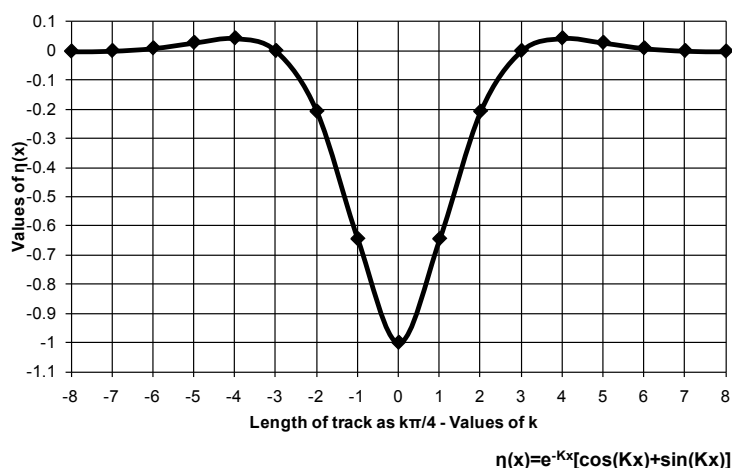
0.008983363	-4.712385	-0.008983327	-3990.23471	6π/4	-4.712385
0.027864163	-3.9269875	-0.019702938	-3325.19559	5π/4	-3.9269875
0.043213918	-3.14159	-0.043214033	-2660.15647	4π/4	-3.14159
-2.66765E-07	-2.3561925	-0.094780413	-1995.11735	3π/4	-2.3561925
-0.207880128	-1.570795	-0.207879852	-1330.07824	2π/4	-1.570795
-0.644794312	-0.7853975	-0.45593843	-665.039118	π/4	-0.7853975
-1	0	1	0	0	0
-0.644794312	0.7853975	0.45593843	665.0391181	π/4	0.7853975
-0.207880128	1.570795	0.207879852	1330.078236	2π/4	1.570795
-2.66765E-07	2.3561925	0.094780413	1995.117354	3π/4	2.3561925
0.043213918	3.14159	0.043214033	2660.156472	4π/4	3.14159
0.027864163	3.9269875	0.019702938	3325.195591	5π/4	3.9269875
0.008983363	4.712385	0.008983327	3990.234709	6π/4	4.712385
2.68986E-08	5.4977825	0.004095844	4655.273827	7π/4	5.4977825
-0.001867443	6.28318	0.001867453	5320.312945	8π/4	6.28318
-0.001204123	7.0685775	0.000851443	5985.352063	9π/4	7.0685775
-0.000388208	7.853975	0.000388206	6650.391181	10π/4	7.853975
-1.82663E-09	8.6393725	0.000176998	7315.430299	11π/4	8.6393725
8.06995E-05	9.42477	8.07002E-05	7980.469417	12π/4	9.42477
5.2035E-05	10.2101675	3.67943E-05	8645.508535	13π/4	10.2101675
1.67761E-05	10.995565	1.67759E-05	9310.547653	14π/4	10.995565
1.0764E-10	11.7809625	7.64879E-06	9975.586772	15π/4	11.7809625
-3.48734E-06	12.56636	3.48738E-06	10640.62589	16π/4	12.56636

Από τις σελίδες 74-75 του βιβλίου "Δράσεις..." προκύπτει ότι μηδενίζεται η συνάρτηση $\eta(x)$ για:

$$x = \frac{\pi}{K} \cdot \left(\frac{3}{4} + \nu \right)$$

Βρίσκουμε τη διακύμανση των τιμών $k\pi/4$ για $-16 \leq k \leq 16$.

Το μεσαίο φορτίο έχει τεταγμένη: $|\eta(0)|=1$ στη μέγιστη τιμή της. Συνεπώς όταν το μεσαίο φορτίο του φορείου βρεθεί στη θέση αυτή, η αντίδραση λόγω αυτού του φορτίου θα είναι (το μείον δείχνει φορά της αντίδρασης προς τα άνω):



Σχήμα 2: Απεικόνιση της συνάρτησης $\eta(x)$ από $-6\pi/4$ έως $+6\pi/4$.

$$R_1 = -\frac{Q_1 \cdot K \cdot \ell}{2} \eta(0) = \frac{12,25t \cdot 0,001180979mm^{-1} \cdot 600mm}{2} \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$R_1 = -4,34t$$

Για $x=2,0$ m έχουμε: $Kx=0,001180979mm^{-1} \cdot 2000mm=2,361958(rad)$, και:

$$\frac{k\pi}{4K} = 2000mm \Rightarrow k = \frac{4 \cdot 0,001180979mm^{-1} \cdot 2000mm}{\pi} = 3,007338329$$

Δηλαδή το σημείο εφαρμογής του φορτίου R_2 και R_3 βρίσκεται πολύ κοντά στα $3\pi/4$, που είναι το σημείο μηδενισμού της $\eta(x)$.

$$\eta(2,000) = +e^{-2,361958} \cdot [\cos(2,361958rad) + \sin(2,361958rad)] =$$

$$= \frac{1}{0,094235529} \cdot [-0,711170431 + 0,703019643] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta(2,000) = +0,000768094$$

Έχει φορά προς τα κάτω και "ελαφρύνει" την αντίδραση που προέρχεται από την R_1 , αφαιρείται από αυτήν. Συνεπώς :

$$R_2 = R_3 = +\frac{12,25t \cdot 0,001180979mm^{-1} \cdot 600mm}{2} \cdot 0,000768094 = +0,003t$$

Άρα η συνολική αντίδραση στη θέση κάτω από το μεσαίο φορτίο του φορείου θα είναι:

$$R_{ολικό} = +R_2 - R_1 + R_3 = -R_1 + 2 \cdot R_2 = -4,34t + 2 \cdot 0,003t = -4,334t$$

όπου το μείον (-) σημαίνει κατεύθυνση της αντίδρασης προς τα άνω. Στην περίπτωση που εξετάσαμε εδώ, τα δύο εκατέρωθεν του μεσαίου άξονα φορτία επιδρούν "ανακουφιστικά", μειώνοντας την αντίδραση και δεν την επαυξάνουν.

ΑΣΚΗΣΗ 9^η M, R, y, q, σ.

Με δεδομένα: $Q_{τροχού} = 11,25$ t (στατική συνιστώσα του φορτίου του τροχού η οποία θα χρησιμοποιηθεί και όχι το συνολικό φορτίο: δυναμική+ στατική συνιστώσα), μέγιστη ταχύτητα 200 km/h, απόσταση στρωτήρων 60 cm, εύρος γραμμής 1435 mm, $\rho_{σιδ/χιάς}=75000$ kN/mm, $\rho_{στρωτήρα}=13500$ kN/mm, $\rho_{σκύρου}=380$ kN/mm

Και δεδομένα για ρ των υπολοίπων 2 στοιχείων/στρώσεων ανά φοιτητή/

$\rho_{υποθέματος}$ = (αριθμός στον κατάλογο της τάξης) + 50 σε kN/mm

$\rho_{υποδομής}$ = 3*(αριθμός στον κατάλογο της τάξης) + 37 σε kN/mm

Σιδηροτροχιά/ Rail UIC 60 με τα στοιχεία του παρακάτω πίνακα/ with data as in the table below:

	J [mm ⁴]	Βάρος weight [kg/m]
UIC 60	3,06·10 ⁷	60,00

$$E=210\text{kN/mm}^2$$

Στρωτήρα ολόσωμο από προεντεταμένο σκυρόδεμα, B70 (Γερμανικού τύπου χρησιμοποιούμενου στην Ελλάδα), με τα στοιχεία του παρακάτω πίνακα/ Monoblock Sleeper from prestressed concrete type B70 (German type used in Greece):

	ρ [kN/mm]	Βάρος weight [kg]	Επιφάνεια έδρασης Seating surface (mm ²)
Ολόσωμος στρωτήρας από προεντεταμένο σκυρόδεμα B70 Monoblock sleeper B70	13.500	320,00	290.900,00

Να υπολογισθούν η ροπή, η βύθιση y, το ομοιόμορφο φορτίο q και η αντίδραση (στατική) του στρωτήρα R από τους τύπους/ calculate M, R, y, q by the following equations:

$$M_{\max} = \frac{Q_{\text{ολικο}}}{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{4EJ}{U}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{EJ\ell}{\rho}}$$

$$R_{\max} = \frac{Q_{\text{ολικο}} \cdot \ell}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{U}{4EJ}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \rho}{EJ}}$$

$$q_{\max} = \frac{Q_{\text{ολικο}}}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{U}{4EJ}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\rho}{EJ\ell}}$$

$$y_{\max} = \frac{Q_{\text{ολικο}}}{2U} \cdot \sqrt[4]{\frac{U}{4EJ}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\ell^3}{EJ\rho^3}}$$

Επίλυση ΑΣΚΗΣΗΣ 9

Για $\rho_{\text{ολικο}} = 40\text{kN/mm}$. For $\rho_{\text{total}} = 40\text{kN/mm}$. Βρίσκουμε το συνολικό φορτίο του τροχού (στατικό και δυναμικό)/ We find the total load (static and dynamic). Δυσμενέστερες τιμές είναι/ Most adverse values are: $t=3$ δηλαδή πιθανότητα εμφάνισης/ that is probability of occurrence 99,7%, και/ and

$$\varphi = 1 + \frac{140 - 60}{140} = 1,571, \bar{s} = 0,3\varphi = 0,47$$

Άρα/ Consequently:

$$Q_{\text{ολικο/total}} = 112,5 \cdot (1 + 3 \cdot 0,47) = 112,5 \cdot 2,41 = 271,125\text{kN}$$

$$M_{\max} = \frac{Q_{\text{ολικο/total}}}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{EJ\ell}{\rho}} = \frac{271.125\text{N}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 3,055 \cdot 10^7 \text{mm}^4 \cdot 600\text{mm}}{40.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}} \Rightarrow$$

$$M_{\max} = \frac{271.125\text{N}}{2\sqrt{2}} \cdot 556,9682541\text{mm} = 53.389.396,73\text{Nmm} \Rightarrow$$

$$M_{\max} = 53.389.396,73 \cdot \frac{1}{10000} \text{t} \cdot \frac{1}{1000} \text{m} = 5,339\text{tm}$$

$$R_{\max} = \frac{Q_{\text{ολικο/total}}}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \rho}{EJ}} = \frac{271.125\text{N}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{600^3 \text{mm}^3 \cdot 40.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}{210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 3,055 \cdot 10^7 \text{mm}^4}} \Rightarrow$$

$$R_{\max} = \frac{271.125\text{N}}{2\sqrt{2}} \cdot 1,07726068 = 0,380869165 \cdot 271.125\text{N} = 103,263\text{kN} = 10,33\text{t}$$

$$q_{\max} = \frac{Q_{\text{ολικο/total}}}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\rho}{EJ\ell}} = \frac{271.125\text{N}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{40.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}{210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 3,055 \cdot 10^7 \text{mm}^4 \cdot 600\text{mm}}} \Rightarrow$$

$$q_{\max} = \frac{271.125\text{N}}{2\sqrt{2}} \cdot 1,795434466 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mm}} = 172,10525 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Το οποίο πολλαπλασιαζόμενο επί την απόσταση μεταξύ των στρωτήρων (εδώ 600 mm) δίδει την $R_{\max}$ δηλαδή 103263,2 N.

Which multiplied by the sleepers' distance (here 600 mm) give the $R_{\max}$ that is 103263,2 N.

$$y_{\max} = \frac{Q_{\text{ολικο/total}}}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\ell^3}{EJ\rho^3}} = \frac{271.125\text{N}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{600^3 \text{mm}^3}{210.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 3,055 \cdot 10^7 \text{mm}^4 \cdot 40.000^3 \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}}\right)^3}} \Rightarrow$$

$$y_{\max} = \frac{271.125\text{N}}{2\sqrt{2}} \cdot 2,693151699 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mm}}{\text{N}} = 2,58\text{mm}$$

Και αν υπολογίσουμε την τάση στο πέλμα της σιδηροτοχιάς
 And if we calculate the stress at the foot of the rail:

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot h = \frac{53.389.396,73\text{Nmm}}{30.550.000\text{mm}^4} \cdot 80,96\text{mm} = 141,49 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 141,49\text{MPa}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10 M, R, q, y , για Δυναμική φόρτιση

Δίδονται οι τύποι που δίνουν τις μέγιστες τιμές της ροπής, Αντίδρασης στρωτήρα, ανά μονάδα μήκους αντίδρασης της γραμμής και βύθισης:

$$M_{\max} = \frac{Q_{\text{ολικο}}}{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{4EJ}{U}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{EJ\ell}{\rho}}$$

$$R_{\max} = \frac{Q_{\text{ολικο}} \cdot \ell}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{U}{4EJ}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \rho}{EJ}}$$

$$q_{\max} = \frac{Q_{\text{ολικο}}}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{U}{4EJ}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\rho}{EJ\ell}}$$

$$y_{\max} = \frac{Q_{\text{ολικο}}}{2U} \cdot \sqrt[4]{\frac{U}{4EJ}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\ell^3}{EJ\rho^3}}$$

Όπου:

$Q_{\text{ολικο}}$ συνολικό φορτίο τροχού (στατικό και δυναμικό)

E μέτρο ελαστικότητας χάλυβα

J ροπή αδρανείας σιδηροτροχιάς

ρ «ελατηριακή σταθερά» της γραμμής για την άσκηση να ληφθεί $\rho=40 \text{ kN/mm}$

ℓ απόσταση στρωτήρων να ληφθεί $\ell=600 \text{ mm}$

Για αξονικό φορτίο (φορτίο άξονα σιδηροδρομικού οχήματος) κανονικής γραμμής (διεθνούς εύρους 1435 mm) είναι $Q=22,5 \text{ t}$.

Το συνολικό φορτίο $Q_{\text{ολικο}}$ να υπολογισθεί από τον τύπο της Γερμανικής βιβλιογραφίας:

$$Q_{\text{ολικο}} = Q_{\text{τροχου}} \cdot (1 + t \cdot \bar{s})$$

Όπου: $\bar{s}=0,1 \varphi \div 0,3 \varphi$, $\varphi = 1 + \frac{V - 60}{140}$

$t=1$ για $P=68.3\%$, $t=2$ για $P=95.5\%$ και $t=3$ για $P=99.7\%$

χρησιμοποιείτε τις δυσμενέστερες τιμές, και $V=140 \text{ km/h}$, $Q_{\text{τροχου}}=22,5/2 \text{ t}$, για τις σιδηροτροχιές του ακόλουθου πίνακα:

Τύπος σιδ/χιάς	Ροπή Αδρανείας [mm^4]	v [mm]
UIC 54	23.460.000	76,20
UIC 60	30.550.000	80,96
UIC 71	41.520.000	83,04

Υπολογίστε τα παραπάνω μεγέθη M, R, q, y , όπως και την τάση σιδηροτροχιάς σ από τον τύπο:

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot h = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{E \cdot J \cdot \ell}{\rho}} \cdot \frac{v}{J} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{E \cdot \ell}{\rho \cdot J^3}} \cdot v$$

ΕΠΙΛΥΣΗ

Βρίσκουμε το συνολικό φορτίο του τροχού (στατικό και δυναμικό):
 Δυσμενέστερες τιμές είναι: $t=3$ δηλαδή πιθανότητα εμφάνισης 99,7%, και

$$\varphi = 1 + \frac{140 - 60}{140} = 1,571, \bar{s} = 0,3\varphi = 0,47$$

Άρα:

$$Q_{ολικο} = 112,5 \cdot (1 + 3 \cdot 0,47) = 112,5 \cdot 2,41 = 271,125 kN$$

$$M_{max} = \frac{Q_{ολικο}}{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{4EJ}{U}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{EJ\ell}{\rho}} = \frac{271.125N}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{210.000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,055 \cdot 10^7 mm^4 \cdot 600mm}{40.000 \frac{N}{mm}}} \Rightarrow$$

$$M_{max} = \frac{271.125N}{2\sqrt{2}} \cdot 556,9682541mm = 53.389.396,73Nmm \Rightarrow$$

$$M_{max} = 53.389.396,73 \cdot \frac{1}{10000} t \cdot \frac{1}{1000} m = 5,339tm$$

$$R_{max} = \frac{Q_{ολικο} \cdot \ell}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{U}{4EJ}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \rho}{EJ}} = \frac{271.125N}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{600^3 mm^3 \cdot 40.000 \frac{N}{mm}}{210.000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,055 \cdot 10^7 mm^4}} \Rightarrow$$

$$R_{max} = \frac{271.125N}{2\sqrt{2}} \cdot 1,07726068 = 0,380869165 \cdot 271.125N = 103,263kN = 10,33t$$

$$q_{max} = \frac{Q_{ολικο}}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{U}{4EJ}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\rho}{EJ\ell}} = \frac{271.125N}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{40.000 \frac{N}{mm}}{210.000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,055 \cdot 10^7 mm^4 \cdot 600mm}} \Rightarrow$$

$$q_{max} = \frac{271.125N}{2\sqrt{2}} \cdot 1,795434466 \cdot 10^{-3} \frac{1}{mm} = 172,10525 \frac{N}{mm}$$

Το οποίο πολλαπλασιαζόμενο επί την απόσταση μεταξύ των στρωτήρων (εδώ 600 mm) δίδει την R_{max} δηλαδή 103263,2 N.

$$y_{max} = \frac{Q_{ολικο}}{2U} \cdot \sqrt[4]{\frac{U}{4EJ}} = \frac{Q}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\ell^3}{EJ\rho^3}} = \frac{271.125N}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{600^3 mm^3}{210.000 \frac{N}{mm^2} \cdot 3,055 \cdot 10^7 mm^4 \cdot 40.000^3 \left(\frac{N}{mm}\right)^3}} \Rightarrow$$

$$y_{max} = \frac{271.125N}{2\sqrt{2}} \cdot 2,693151699 \cdot 10^{-5} \frac{mm}{N} = 2,58mm$$

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot h = \frac{53.389.396,73Nmm}{30.550.000mm^4} \cdot 80,96mm = 141,49 \frac{N}{mm^2} = 141,49MPa$$

ΑΣΚΗΣΗ 11 M.A.M.

Τα δεδομένα της άσκησης 2, να χρησιμοποιηθούν –όσα χρειάζονται- και στην παρούσα άσκηση. Και χρησιμοποιώντας τη σχέση που αποδείξατε στην 1^η άσκηση για τη δυναμική ακαμψία h της γραμμής

Να υπολογισθεί η τυπική απόκλιση της φόρτισης λόγω Μη Ανηρτημένων Μαζών για τα ακόλουθα δεδομένα (χρησιμοποιείτε το συντελεστή k_a):

k_1	k_a
3	0.000389424
3.5	0.000454328
4	0.000519232
4.5	0.000584137
5	0.000649041
5.5	0.000713945
6	0.000778849
6.5	0.000843753
7	0.000908657
7.5	0.000973561
8	0.001038465
8.5	0.001103369
9	0.001168273
9.5	0.001233177
10	0.001298081
10.5	0.001362985
11	0.001427889
12	0.001557697

Εφαρμόζοντας τους τύπους (κεφάλαιο 14 «Επιλεγμένων Θεμάτων Σιδηροδρομικής»), και προσθέτοντας στην m_{MAM} που σας δίδεται στον παραπάνω πίνακα και μια μάζα γραμμής που συμμετέχει στην κίνηση των Μη Ανηρτημένων Μαζών (MAM) του οχήματος, ίση με 0,28 t:

$$\sigma(\Delta Q_{MAM}) = k_a \cdot V \cdot \sqrt{m_{MAM} \cdot h_{ΓΡΑΜΜΗΣ}} \quad [t] \quad (20)$$

Και

$$\sigma(\Delta Q_{MAM}) = k'_a \cdot \frac{V}{200} \cdot \sqrt{\frac{m_{MAM}}{1.7804}} \cdot \sqrt{\frac{h}{75}} \quad [t] \quad (28)$$

$$\text{Οπου } k'_a = 0,3 \cdot k_1$$

Και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των (20) και (28).

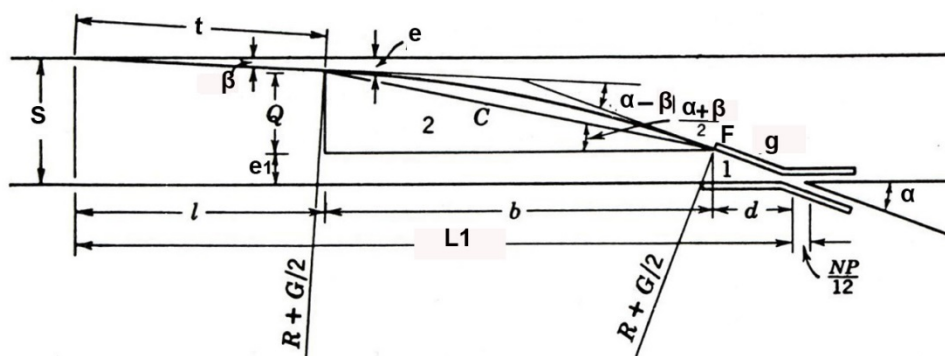
ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 11

Έστω $h=78\text{kN/mm}$ και $m_{MAM}=2,55t$

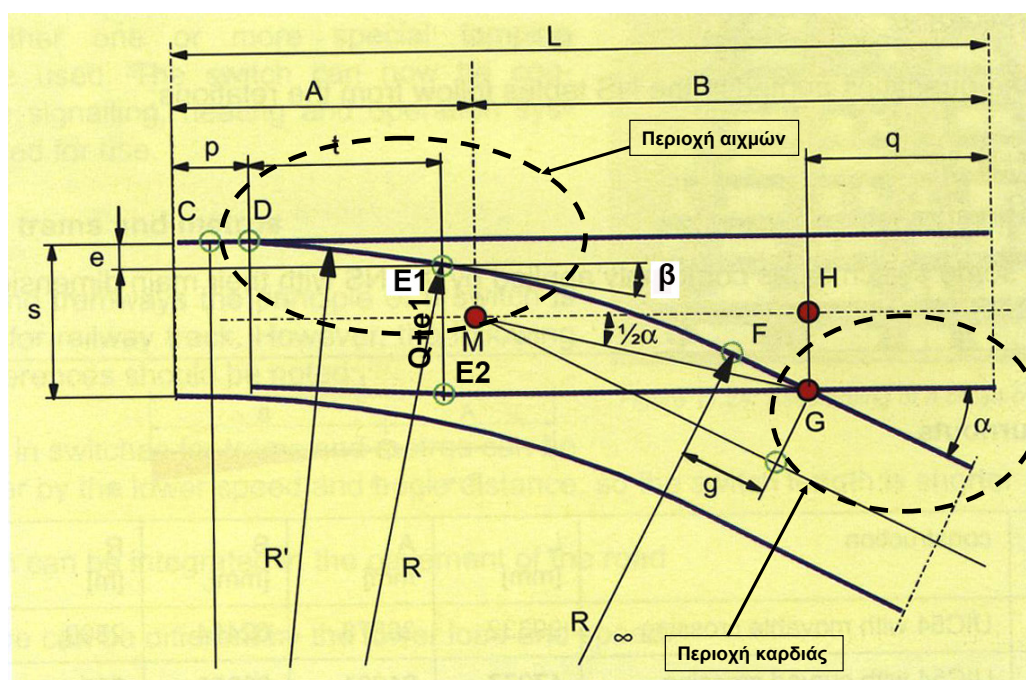
$$(20) \Rightarrow \sigma(\Delta Q_{MAM}) = k_a \cdot V \cdot \sqrt{m_{MAM} \cdot h_{\Gamma\text{ΡΑΜΜΗΣ}}} = 0.001557697 \cdot 200 \cdot \sqrt{2,55 \cdot 78} = 4,934t$$

$$(28) \Rightarrow \sigma(\Delta Q_{MAM}) = k'_a \cdot \frac{V}{200} \cdot \sqrt{\frac{m_{MAM}}{1.7804}} \cdot \sqrt{\frac{h}{75}} = 0,3 \cdot 12 \cdot \frac{200}{200} \cdot \sqrt{\frac{2,55 \cdot 78}{1,7804 \cdot 75}} = 4,394t$$

ΑΣΚΗΣΗ 12 ΑΠΟΚΛΙΝΟΝΤΟΣ ΚΛΑΔΟΥ ΑΛΛΑΓΗΣ



Σχήμα 52: Λεπτομέρεια αιχμής αλλαγής και περιοχής καρδιάς [Hay, 1982]



Σχήμα 54: Διαστάσεις μιας κοινής αλλαγής

Απόσπασμα από τις Σημειώσεις

«Ο καθηγητής Hay του Urbana University of Illinois δίδει τον ακόλουθο τύπο για την ταχύτητα στον καμπύλο κλάδο μιας αλλαγής:

$$V_t = \sqrt{\left(\frac{e_\alpha + 3}{0,0007 \cdot D_t} \right)} \quad (2)$$

Όπου:

V_t = επιτρεπόμενη ταχύτητα στον καμπύλο κλάδο της αλλαγής (miles/h)

e_α = η υπερύψωση που πραγματικά υπάρχει (συνήθως ίση με μηδέν ίντσες)

D_t = Σε μοίρες (degrees) η μεγαλύτερη από τις δύο γωνίες: (1) τη γωνία α καμπύλης στην καρδιά της αλλαγής και (2) τη γωνία β στην αιχμή της αλλαγής για ευθείες αιχμές (η γωνία β στα Σχήματα 52 και 54 είναι η ίδια όπως προκύπτει από τα όμοια τρίγωνα). Αν μεγαλύτερη γωνία είναι η (2) περίπτωση τότε οι βαθμοί της καμπύλης στην αιχμή της αλλαγής είναι $(\beta/t) \times 100$, όπου β =η γωνία της αιχμής της αλλαγής και t το μήκος της αιχμής της αλλαγής σε πόδια (feet) επειδή ο τύπος είναι εμπειρικός (βλέπε Σχήμα 52 και Σχήμα 54). Σε αντίθετη περίπτωση $D_t = \alpha$.

.....

Ο Esveld δίδει για επιτρεπόμενη πλευρική επιτάχυνση 0,8 m/sec² (βλέπε σχήμα 53)

$$a = \frac{V^2}{R} \Rightarrow V_{\max} = 2,79 \sqrt{R} \quad (3)$$

Όπου V σε km/h και R σε m

Από το Σχήμα 52, προκύπτει ότι η γωνία β στο τέλος (πτέρνα) της βελόνης δίδεται από την εξίσωση:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{e}{t}\right) \quad (4)$$

Όπου e η απόσταση της βελόνης από την αντιβελόνη στην πτέρνα της βελόνης, συνήθως 6,25 inches= 158,75 mm [Hay, 1982]. Κανονικά πρέπει να αφαιρεθεί από το e το πάχος της βελόνης στο σημείο επαφής με την αντιβελόνη. Κατά τον [Hay, 1982] είναι ¼ inches. Άρα στον παραπάνω τύπο (4) θα πρέπει να μπει στον αριθμητή ένα μέγεθος $e' = e - e_1$ όπου $e_1 \approx 1/4$ inc=6,34 mm.

Μερικές επιμέρους ακόμη διαστάσεις των αλλαγών ευρίσκονται από το Σχήμα 52:

Επιλύοντας το τρίγωνο 1 (με πλευρές g , d και e_1) λαμβάνουμε τα e_1 και d από το g και τη γωνία α . Επιλύοντας το τρίγωνο 2 με πλευρές C , Q και b , έχουμε:

$$Q = S - (e + e_1) \quad (15)$$

.....

.....

.....

Όπου μία γωνία ισούται με: $[(\alpha+\beta)/2]$ (βλεπε σχήμα 52). Αυτό το τρίγωνο επιλύεται ως προς b και C. Εφ’ όσον το C είναι η χορδή καμπύλης με επίκεντρη γωνία $(\alpha-\beta)$ και ακτίνα ίση με $R+S/2$, (όπου εδώ R η ακτίνα μέχρι τον άξονα της γραμμής) τότε:

$$\left(R + \frac{S}{2}\right) = \frac{C}{2 \cdot \sin \left[\left(\frac{1}{2} \right) \cdot (\alpha - \beta) \right]} \quad (16)»$$

Να χρησιμοποιηθεί ως μήκος από τον πίνακα, και 1 mile/h=1,609 km/h, 1 inch=25,4 mm, 1 foot=12 inches. Δίδεται επίσης e1=300mm.

	t [m]
Φοιτητής 1	12
Φοιτητής 2	11,9
Φοιτητής 3	11,8
Φοιτητής 4	11,7
Φοιτητής 5	11,6
Φοιτητής 6	11,5
Φοιτητής 7	11,4
Φοιτητής 8	11,3
Φοιτητής 9	11,2
Φοιτητής 10	11,1
Φοιτητής 11	11
Φοιτητής 12	10,9
Φοιτητής 13	10,8
Φοιτητής 14	10,7
Φοιτητής 15	10,6
Φοιτητής 16	10,5
Φοιτητής 17	10,4
Φοιτητής 18	10,3

Να υπολογισθεί από την (4) η γωνία β, και στη συνέχεια η μέγιστη ταχύτητα στον αποκλίνοντα κλάδο κατά Hay και να συγκριθεί με τα αποτελέσματα που δίδει ο τύπος του Esveld, για τα ακόλουθα στοιχεία υπερύψωση μηδέν (ea=0), γωνία αλλαγής α=τοξεφ(1:9).

Επίλυση ΑΣΚΗΣΗΣ 12:

Ας λάβουμε t=11500 m = 37,7297 ft και e’= 158,75-6,34 = 152,41 mm

$$\beta = \arcsin (e'/t) = \arcsin (152,41/11500) = 0,759249^{\circ}$$

$$\alpha = \arctan (1/9) = 6,340192 \text{ degrees}$$

$$\text{Άρα } D_t = \alpha = 6,340192 \text{ degrees}$$

Επειδή $e_a=0 \Rightarrow V_t = \sqrt{\left(\frac{e_a+3}{0,0007 \cdot D_t}\right)} = \sqrt{\left(\frac{0+3}{0,0007 \cdot 6,340192}\right)} = 25,9992 \text{ mi/h ή}$
 $25,9992 \times 1,609 = 41,8328 \text{ km/h}$

η παραπάνω επίλυση είναι κατά τον καθηγητή Hay.

Κατά τον Esveld:

Γωνία αλλαγής $\tan(\alpha)=$	0,111111 $\alpha=1/9$ Δεδομένο άσκησης
$\arctan(\alpha)=$ [rad]	0,110657 rad
$\arctan(\alpha)=$ [degrees]	6,340192 degrees
$e_1=$ [mm]	300,000000 Δεδομένο άσκησης
$d=$ [mm]	2700,000000 mm
$g=$ [mm]	2716,615541 mm

από τρίγωνο 2

Εύρος S=	1435,000000 mm
e= κατά Hay	158,750000 mm Δεδομένο άσκησης
$Q= S-e-e_1=$	976,250000 mm
$t=$ [mm]	11500,000000 mm Δεδομένο άσκησης
$\beta=\arcsin (e/t)$	0,013805 rad
$\beta=$	0,790956 degrees
$(\alpha+\beta)/2=$	0,062231 rad
$(\alpha+\beta)/2=$	3,565574 degrees
$C= Q/(\sin((\alpha+\beta)/2))$	15697,648221 mm
$b=C*\cos((\alpha+\beta)/2)$	15667,261905 mm
$\alpha-\beta=$	0,097306 rad
$\alpha-\beta=$	5,549236 degrees
$(R+S/2)=C/[2*\sin[1/2*(\alpha-\beta)]]$	161385,634731 mm
R= ΑΚΤΙΝΑ ΤΟΞΟΥ ΚΥΚΛΟΥ	160668,134731 mm
R=	160,668135 m
Vmax=	35,364627 km/h <41,8328 km/h

13^η ΑΣΚΗΣΗ ΦΟΡΤΙΣΕΩΝ

Σύγκριση 4 Μεθόδων Υπολογισμού

Με δεδομένα/ with data: $Q_{\text{τροχού}} / Q_{\text{wheel}} = 11,25$ t, μέγιστη ταχύτητα $V_{\text{max}} = 200$ km/h, απόσταση στρωτήρων/ sleeper's distance $\ell = 60$ cm, εύρος γραμμής/ track gauge 1435 mm, $\rho_{\text{υποδομής}} = \rho_{\text{subgrade}} = 100$ kN/mm, $\rho_{\text{σιδ/χιας}} = \rho_{\text{rail}} = 75000$ kN/mm, $\rho_{\text{σκυρου}} = \rho_{\text{ballast}} = 380$ kN/mm, $\rho_{\text{στρωτηρα}} = \rho_{\text{sleeper}} = 13500$ kN/mm, $\rho_{\text{υποθεματος}} = \rho_{\text{pad}} = 52 + [(\text{δύο τελευταία ψηφία ΑΜ φοιτητή})/100]$ kN/mm (υπόθεμα / pad Zw700 του συνδέσμου/ of fastening W-14),

Σιδηροτροχιά/Rail UIC 60, με τα στοιχεία του παρακάτω πίνακα/ with the data of the following table:

	J [mm ⁴]	Βάρος Weight [kg/m]
UIC 60	3,06E+07	60,00

$$E = 210 \text{ kN/mm}^2$$

Στρωτήρα ολόσωμο από προεντεταμένο σκυρόδεμα/ Monoblock concrete sleeper, B70, με τα στοιχεία του παρακάτω πίνακα/ with data the following:

	Βάρος weight [kg]	Επιφάνεια Έδρασης Seating Surface (mm ²)
Ολόσωμος στρωτήρας από προεντεταμένο σκυρόδεμα B70 Monoblock Concrete sleeper B70	320,00	290.900,00

Μέγιστη ανεπάρκεια υπερύψωσης/ Maximum superelevation deficiency $\alpha = 160$ mm, ύψος Κέντρου Βάρους οχήματος από τη σιδηροτροχιά/ height of the Center of Gravity of the vehicle from the rail $h_{\text{KB}} = 1,50$ m, εύρος γραμμής/ track gauge $e = 1,435$ m

Φορτίο λόγω ανεπάρκειας υπερύψωσης/ Load due to superelevation deficiency:

$$Q_{\alpha} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot h_{\text{KB}}}{e^2} \cdot Q_{\text{τροχού}} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot h_{\text{KB}}}{e^2} \cdot Q_{\text{wheel}}$$

Με δεδομένες τις σχέσεις για το στατικό φορτίο και τη δυναμική ακαμψία της γραμμής:

$$\bar{A}_{\text{στατικό}} = A_{\text{stat}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \cdot \rho_{\text{ολικο}}}{E \cdot J}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \cdot \rho_{\text{total}}}{E \cdot J}} \quad \text{και/and}$$

$$h = \frac{\rho_{\text{ολικο}}}{A_{\text{στατικό}}} = \frac{\rho_{\text{total}}}{A_{\text{stat}}}, \quad \text{και} \quad \bar{A}_{\text{δυναμικό}} = \bar{A}_{\text{dynamic}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \cdot h_{\text{ολικο}}}{E \cdot J}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \cdot h_{\text{total}}}{E \cdot J}}$$

Με Μη Ανηρτημένες μάζες Οχήματος/ Non-Suspended Masses of the Vehicle = 1,5 t, συντελεστή/ coefficient $k_1 = 9 + [(\text{δύο τελευταία ψηφία ΑΜ φοιτητή})/100]$,

Να υπολογισθεί η τυπική απόκλιση της δυναμικής συνιστώσας του φορτίου για την υπό εξέταση γραμμή/ Calculate the standard deviation of the dynamic component of the load for the track under examination:

$$\sigma(\Delta Q_{MAM}) = \sigma(\Delta Q_{NSM}) = (k_1 \cdot A) \cdot V \sqrt{m_{MAM} \cdot h_{\Gamma PAMMH\Sigma}} = (k_1 \cdot A) \cdot V \sqrt{m_{NSM} \cdot h_{TRACK}} \quad (32\alpha)$$

Το αποτέλεσμα σε [kN]/ the result in [kN]

όπου/ where : $m_{MAM} = m_{ΟΧΗΜΑΤΟΣ} + m_{\Gamma PAMMH\Sigma} / m_{NSM} = m_{VEHICLE} + m_{TRACK}$

V σε/in km/h, m σε/ in [t], h σε /in kN/mm.

δηλαδή στην κίνηση των Μη Αναρτημένων Μαζών συμμετέχει και ένα τμήμα της επιδομής της Γραμμής με $A = 1298,081 \cdot 10^{-6}$ και k_1 κυμαινόμενο κατά τις τιμές του ακόλουθου πίνακα 6

that is in the motion of the Non Suspended Masses of the Vehicle a part of the Superstructure of the Track Mass participates also with $A = 1298,081 \cdot 10^{-6}$ and k_1 fluctuating as in the following table:

Πίνακας 5: Τιμές του συντελεστή k_1 / **Table 5:** Values of the coefficient k_1

	ΤΡΟΧΙΣΜΕΝΗ ΣΙΔΗΡΟΤΡΟΧΙΑ GROUND RAIL			ΜΗ ΤΡΟΧΙΣΜΕΝΗ ΣΙΔΗΡΟΤΡΟΧΙΑ NON GROUND RAIL		
	Καλή Good	Μέτρια Mediocre	Στο όριο At the limit	Καλή Good	Μέτρια Mediocre	Στο όριο At the limit
$k_1 =$	3	4,5	6	6	9	12

και αν αντικαταστήσουμε το γινόμενο $(k_1 \cdot A)$ με ένα συντελεστή k_a : $k_a = k_1 \cdot A$ τότε/
 and if we substitute the product $(k_1 \cdot A)$ with a coefficient k_a : $k_a = k_1 \cdot A$ then:

$$\sigma(\Delta Q_{MAM}) = k_a \cdot V \sqrt{(m_{ΟΧΗΜΑΤΟΣ} + m_{\Gamma PAMMH\Sigma}) \cdot h_{\Gamma PAMMH\Sigma}} \quad \text{σε/in [kN]} \quad (32\beta)$$

όπου/ where:

V σε/in km/h, m σε/ in [t], h σε /in kN/mm και οι τιμές του k_a από τον Πίνακα 6/ and the values of the coefficient k_a from the Table 6:

Πίνακας 6: Τιμές του συντελεστή k_a / **Table 6:** Values of the coefficient k_a

	ΤΡΟΧΙΣΜΕΝΗ ΣΙΔΗΡΟΤΡΟΧΙΑ GROUND RAIL			ΜΗ ΤΡΟΧΙΣΜΕΝΗ ΣΙΔΗΡΟΤΡΟΧΙΑ NON GROUND RAIL		
	Καλή Good	Μέτρια Mediocre	Στο όριο At the limit	Καλή Good	Μέτρια Mediocre	Στο όριο At the limit
$k_a =$	$38942,43 \cdot 10^{-7}$	$58413,65 \cdot 10^{-7}$	$77884,87 \cdot 10^{-7}$	$77884,87 \cdot 10^{-7}$	$116827,30 \cdot 10^{-7}$	$155769,73 \cdot 10^{-7}$

Η μάζα γραμμής $m_{\Gamma PAMMH\Sigma}$ που συμμετέχει στην κίνηση των Μη Αναρτημένων Μαζών δίδεται από τον τύπο, από μετρήσεις των Βρετανικών Σιδηροδρόμων (BR) σύμφωνα με τους (Jenkins et al., 1974):

The Track Mass participating in the motion of the Non Suspended Masses of the Vehicle is given by the following equation as it has been derived from measurements performed by the British Rail (BR) according to (Jenkins et al., 1974):

$$m_{\Gamma\text{ΡΑΜΜΗΣ}} = m_{\text{TRACK}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m_{\text{μοναδιαία}}}{K} = \frac{3}{2} \cdot m_{\text{μοναδιαία}} \cdot L = \frac{3}{2} \cdot m_{\text{unitary}} \cdot L \quad (32\gamma)$$

$$m_{\text{μοναδιαία}} = m_{\text{unitary}} = (\text{BAPOΣ}_{\text{σιδηροτροχιάς}} / \text{WEIGHT}_{\text{rail}}) + \frac{(\text{BAPOΣ}_{\text{στρωτήρα}} / \text{WEIGHT}_{\text{sleeper}})}{\ell}$$

$$L = \frac{1}{K} = \sqrt[4]{\frac{4EJ\ell}{\rho_{\text{ολικο}}}} = \sqrt[4]{\frac{4EJ\ell}{\rho_{\text{total}}}}$$

τα βάρη σε τόννους [t] της μεν σιδηροτροχιάς ανά μέτρο μήκους, για τους δε του δε στρωτήρες το βάρος του ενός στρωτήρα, η απόσταση στρωτήρων ℓ σε μέτρα [m], και τελικά η μάζα προκύπτει σε [t] και προστίθεται στη Μη Ανηρτημένη Μάζα του Οχήματος $m_{\text{ΟΧΗΜΑΤΟΣ}}$ που δίδεται από τον κατασκευαστή του τροχαίου υλικού.

the weights in [t]: of the rail the weight per meter of length for the sleepers the weight of one sleeper, the distance between the sleepers ℓ in [m] and the result for the mass in [t] and it should be added to the Non Suspended Mass of the Vehicle m_{VEHICLE} (given by the producer of the rolling stock).

Από τη σχέση (32 β) υπολογίστε τη $\sigma(\Delta Q_{\text{MAM}})$ / From (32β) calculate the $\sigma(\Delta Q_{\text{NSM}})$.

και η τυπική απόκλιση των Ανηρτημένων Μαζών, με συντελεστή σφαλμάτων and the standard deviation of the Suspended Masses with coefficient of defaults $N_L=1,2$:

$$\sigma(\Delta Q_{\text{AM}}) = \sigma(\Delta Q_{\text{SM}}) = \frac{V - 40}{1000} \cdot 1,2 \cdot Q_{\text{τροχου/wheel}}$$

οπότε η τυπική απόκλιση του συνολικού δυναμικού φορτίου ισούται:

then the standard deviation of the total dynamic component of the Load is equal to:

$$\sigma(\Delta Q_{\text{δυναμικό/dynamic}}) = \sqrt{\sigma^2(\Delta Q_{\text{MAM/NSM}}) + \sigma^2(\Delta Q_{\text{AM/SM}})}$$

(1) Να υπολογισθεί κατά τη μέθοδο Γιαννακού, το συνολικώς δρον φορτίο (Δράση) επί του στρωτήρα (δράση-αντίδραση επί του στρωτήρα) για πιθανότητα εμφάνισης 99,7%, δηλ. με 3 φορές την τυπική απόκλιση της δυναμικής συνιστώσας του φορτίου (χωρίς καμμία κατανομή στους εκατέρωθεν στρωτήρες). Η στατική συνιστώσα του φορτίου θα κατανέμεται και το ποσοστό του στατικού φορτίου που δρά επί του στρωτήρα θα υπολογίζεται με το $\bar{A}_{\text{δυναμικό}}$.

Calculate with the Giannakos (2004) method the total acting load (Action) on each sleeper (Action/Reaction on the sleeper) for probability of occurrence 99,7% that is with 3 standard deviations of the dynamic component of the load (without any distribution to the adjacent sleepers). The static component of the load is distributed with the coefficient $\bar{A}_{\text{dynamic}}$.

$$R_{\text{ολικο/total}} = \bar{A}_{\text{δυναμικό/dynamic}} \cdot (Q_{\text{τροχου/wheel}} + Q_a) + 3 \cdot \sigma(\Delta Q_{\text{δυναμικό/dynamic}})$$

Επιπλέον να υπολογισθεί η αντίδραση/δράση από τον τύπο:

$$R_{ολικό/total} = \frac{1}{2\sqrt[8]{2}} \cdot \sqrt[16]{\left(\frac{\rho_{ολικο} \cdot \ell^3}{E \cdot J}\right)^3} \cdot (Q_{τροχου} + Q_{\alpha}) +$$

$$+ (3 \cdot \underbrace{\left[k_{\alpha} \cdot V \cdot \sqrt[8]{2^6 \cdot (m_{ΟΧΗΜΑΤ} + m_{ΓΡΑΜ})^4 \cdot E \cdot J \cdot \left(\frac{\rho_{ολικο}}{\ell}\right)^3} \right]^2}_{\sigma(\Delta Q_{MAM})} + \underbrace{\left(\frac{V-40}{1000} \cdot N_L \cdot Q_{τροχου} \right)^2}_{\sigma(\Delta Q_{AM})})$$

(2) Να υπολογισθεί το συνολικό φορτίο Q από τον τύπο της Γερμανικής βιβλιογραφίας:

Calculate the total load from the German literature:

$$Q_{ολικό/total} = Q_{τροχού/wheel} \cdot (1 + t \cdot \bar{s})$$

Όπου/ where:

$$\bar{s}=0,1 \text{ } \varphi \div 0,3 \text{ } \varphi, \quad \varphi = 1 + \frac{V-60}{140}$$

t=1 για/for P=68.3%, t=2 για/for P=95.5% και/and t=3 για/for P=99.7%

να χρησιμοποιήσετε τις δυσμενέστερες τιμές t=3 (πιθανότητα εμφάνισης 99,7%) και s=0,3φ. Η αντίδραση/δράση επί του στρωτήρα να υπολογισθεί με το $\bar{A}_{στατικό}$.

use the most adverse values t=3 (probability of occurrence 99,7%) and s=0,3φ. The Action/Reaction on each sleeper should be calculated with $\bar{A}_{static}$.

Δηλαδή/That is: $R = \bar{A}_{στατικό/static} \cdot Q_{ολικό/total}$

(3) να υπολογισθεί με τη μέθοδο της Γαλλικής βιβλιογραφίας η συνολική αντίδραση/δράση επί του στρωτήρα από τον ακόλουθο τύπο:

Calculate according to the method cited in French literature the total Action/Reaction on each sleeper from the following equation:

$$R_{ολικό-max} = \left[Q_{τροχού} \cdot \left(1 + \frac{Q_{\alpha}}{Q_{τροχού}} \right) + 2 \cdot \sqrt{[\sigma^2(\Delta Q_{MAM})] + [\sigma^2(\Delta Q_{AM})]} \right] \cdot \bar{A}_{στατ} \cdot 1,35$$

$$R_{total-max} = \left[Q_{wheel} \cdot \left(1 + \frac{Q_{\alpha}}{Q_{wheel}} \right) + 2 \cdot \sqrt{[\sigma^2(\Delta Q_{NSM})] + [\sigma^2(\Delta Q_{SM})]} \right] \cdot \bar{A}_{stat} \cdot 1,35$$

και/ and

(4) Με τη μέθοδο της Αμερικανικής βιβλιογραφίας (AREMA method):

Calculate according to the method cited in American literature (AREMA method) the total Action/Reaction on each sleeper from the following equation

$$R_{max} = \bar{A}_{στατικό/stat} \cdot \left(1 + \frac{D_{33} \cdot V}{D_{τροχού/wheel} \cdot 100} \right) \cdot Q_{τροχού/wheel}$$

όπου/where: D_{33} σε ίντσες η διάμετρος ενός τροχού «βάσης» 33 ιντσών/ in inches the diameter of a reference wheel of 33 inches

$D_{\text{τροχού}}$ σε ίντσες η διάμετρος τροχού του εξεταζόμενου οχήματος (στην παρούσα περίπτωση να ληφθεί $D_{\text{τροχού}}=1$ μέτρο./ in inches the diameter of the wheel under examination, here use a 1 m diameter.

V η ταχύτητα σε μίλια ανά ώρα/ the speed in mil/h.(1 mil/h = 1,609 km/h)

ΕΠΙΛΥΣΗ

Ερώτημα 1 (Μέθοδος Γιαννακού):

$$\frac{1}{\rho_{\text{ολικο}}} = \frac{1}{\rho_{\text{σιδ/χιας}}} + \frac{1}{\rho_{\text{στρωτηρα}}} + \frac{1}{\rho_{\text{υποθεματος}}} + \frac{1}{\rho_{\text{σκυρου}}} + \frac{1}{\rho_{\text{υποδομης}}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho_{\text{ολικο}}} = \frac{1}{75000} + \frac{1}{13500} + \frac{1}{50} + \frac{1}{380} + \frac{1}{100} = 0,032718986 \Rightarrow \rho_{\text{ολικο}} = 30,56329402 \text{ kN/mm}$$

$$\bar{A}_{\text{στατικο}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \cdot \rho_{\text{ολικο}}}{E \cdot J}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{600^3 \text{ mm}^3 \cdot 30,56329402 \text{ kN/mm}}{210 \text{ kN/mm}^2 \cdot 3,055 \cdot 10^7 \text{ mm}^4}} = 35,609\% = 0,35609$$

$$\Delta Q_{\alpha} = \frac{2 \cdot \alpha \cdot h}{e^2} \cdot Q_{\text{τρ}} = \frac{2 \cdot 160 \cdot 1500}{1435^2} \cdot 112,5 = 26,22345785 \text{ kN} \quad \text{συνιστώσα λόγω ανεπάρκειας υπερύψωσης.}$$

$$MAM_{\text{ολικη}} = 1,5 + 0,413 = 1,913 \text{ t} = 19,13 \text{ kN}$$

$$\text{Από τα δεδομένα της άσκησης } k_1 = 12 \Rightarrow k_{\alpha} = 0,3 \cdot k_1 = 3,6$$

$$h_{\text{ΓΡ}} = \rho_{\text{δυναμ}} = \frac{\rho_{\text{ολικο}}}{\bar{A}_{\text{στατικο}}} = \frac{30,56329402}{0,35609} = 85,83025 \text{ kN/mm}$$

$$\bar{A}_{\text{δυναμικο}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \cdot h_{\text{ΓΡ}}}{E \cdot J}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{600^3 \cdot 85,83025}{210 \cdot 3,055 \cdot 10^7}} = 0,460968$$

$$\sigma(\Delta R_{AM}) = \frac{V - 40}{1000} \cdot N_L \cdot Q_{\text{τροχου}} = \frac{200 - 40}{1000} \cdot 1,0 \cdot 112,5 = 18 \text{ kN}$$

$$\sigma(\Delta R_{MAM}) = k'_{\alpha} \cdot \frac{V}{200} \cdot \sqrt{\frac{m_{MAM}}{1,7804}} \cdot \sqrt{\frac{h_{\text{ΓΡ}}}{75}} = 3,6 \cdot \frac{200}{200} \cdot \sqrt{\frac{1,913}{1,7804}} \cdot \sqrt{\frac{85,83025}{75}} = 39,920 \text{ kN}$$

$$\sigma(\Delta R_{\text{ολικο}}) = \sqrt{\sigma^2(\Delta R_{AM}) + \sigma^2(\Delta R_{MAM})} = \sqrt{18^2 + 39,92^2} = 43,790 \text{ kN}$$

$$R_{\text{λειτουργίας}} = \bar{A}_{\text{δυναμ}} \cdot (Q_{\text{τροχού}} + Q_{\alpha}) + (v \cdot \sqrt{\sigma^2(\Delta Q_{\text{MAM}}) + \sigma^2(\Delta Q_{\text{MAM}})}) =$$

$$= 0,460968 \cdot (112,5 + 26,2235) + (3 \cdot 43,790) = 195,318 \text{ kN}$$

Άρα Ρολικό= 195,318 kN

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και από τον δεύτερο τύπο

Ερώτημα 2 (Μέθοδος Γερμανικής βιβλιογραφίας):

$$\varphi = 1 + \frac{V - 60}{140} = 1 + \frac{200 - 60}{140} = 2 \Rightarrow \bar{s} = 0,3 \cdot \varphi = 0,6$$

$$Q_{\text{ολικό}} = Q_{\text{τροχού}} \cdot (1 + t \cdot \bar{s}) = 112,5 \cdot (1 + 3 \cdot 0,6) = 315 \text{ kN}$$

$$R = Q_{\text{ολικό}} \cdot \bar{A}_{\text{στατικό}} = 315 \cdot 0,35609 = 112,168 \text{ kN} < 195,318 \text{ kN}$$

Άρα Ρολικό= 112,168 kN

Ερώτημα 3 (Μέθοδος Γαλλικής βιβλιογραφίας):

$$R_{\text{ολικό-max}} = \left[Q_{\text{τροχού}} \cdot \left(1 + \frac{Q_{\alpha}}{Q_{\text{τροχού}}} \right) + 2 \cdot \sqrt{\left[\sigma^2(\Delta Q_{\text{MAM}}) \right] + \left[\sigma^2(\Delta Q_{\text{AM}}) \right]} \right] \cdot \bar{A}_{\text{στατ}} \cdot 1,35 \Rightarrow$$

$$R_{\text{ολικό-max}} = \left[112,5 \cdot \left(1 + \frac{26,2235}{112,5} \right) + 2 \cdot \sqrt{\left[18^2 \right] + \left[39,92^2 \right]} \right] \cdot 0,35609 \cdot 1,35 \Rightarrow$$

Ρολικό-max=108,789 kN (μικρότερο από τις δύο προηγούμενες μεθόδους).

Ερώτημα 4 (Μέθοδος Αμερικανικής βιβλιογραφίας – AREMA method):

$$\theta = \frac{D_{33} \cdot V}{D_{\text{τροχού}} \cdot 100} = \frac{33 \cdot 200 \cdot \frac{1}{1,609}}{39,37 \cdot 100} = 1,041891456$$

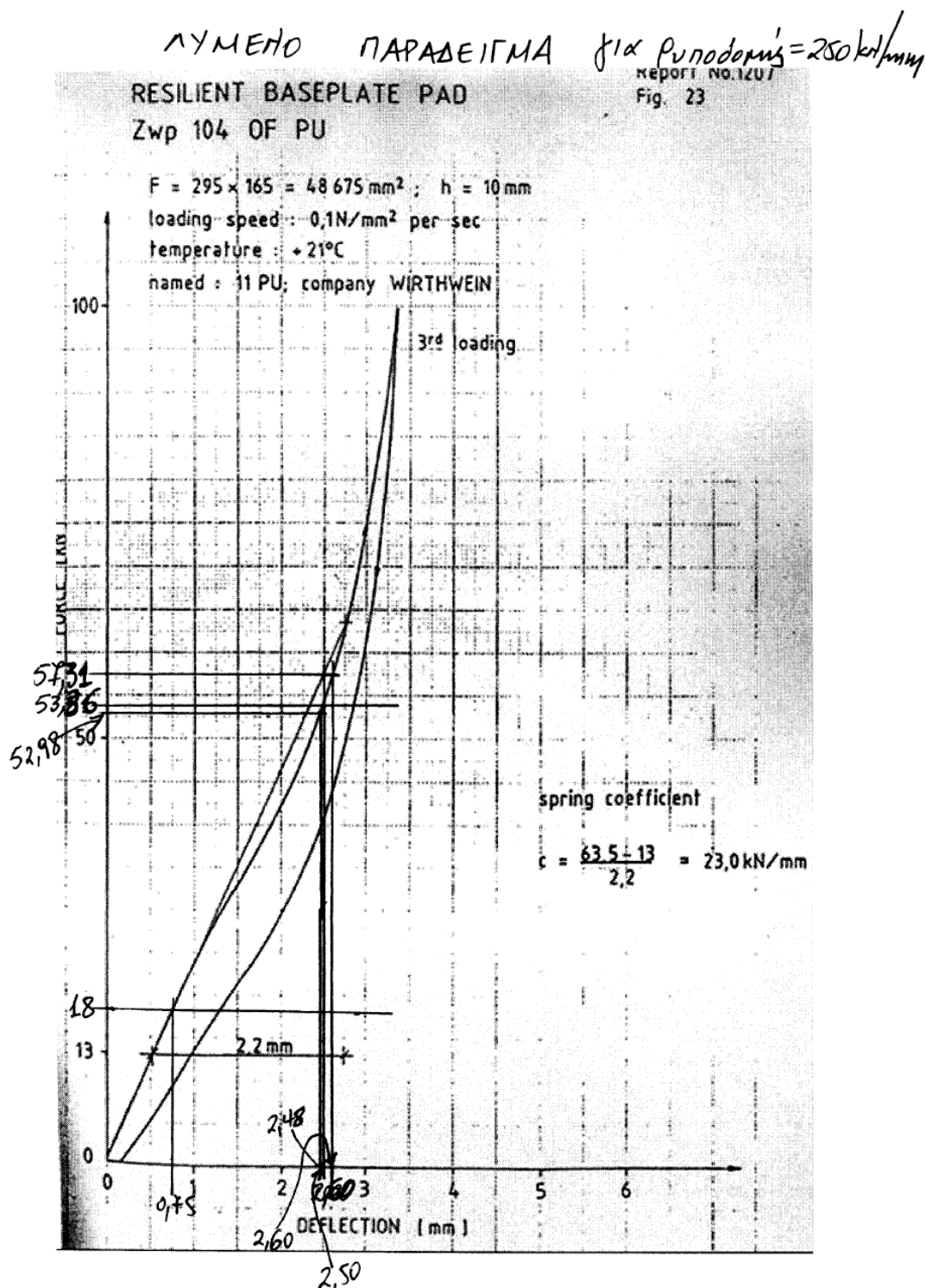
$$Q_{\text{ολικό}} = Q_{\text{τροχού}} \cdot (1 + \theta) = 112,5 \cdot (1 + 1,041891456) = 229,713 \text{ kN}$$

$$R_{\text{max}} = \sqrt[4]{\frac{\rho}{4E \cdot I \cdot \ell}} \cdot \frac{Q_{\text{ολικό}} \cdot \ell}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\rho \cdot \ell^3}{E \cdot I}} \cdot Q_{\text{ολικό}} = \bar{A}_{\text{στατ}} \cdot Q_{\text{ολικό}} \Rightarrow$$

$$R_{\text{max}} = 0,35609 \cdot 229,713 = 81,798 \text{ kN}$$

Άρα Rmax=81,798 kN που είναι η μικρότερη τιμή από τις 4 μεθόδους.

ΑΣΚΗΣΗ 14: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ρ_{stat} ΥΠΟΘΕΜΑΤΟΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΥ
EXERCISE FOR THE CALCULATION OF $\rho_{\text{pad-stat}}$ OF THE FASTENING



ΚΑΜΠΥΛΗ ΦΟΡΤΙΟΥ-ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΥΠΟΘΕΜΑΤΟΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΥ W13
 με την επίλυση εύρεσης του στατικού $\rho_{\text{υποθ.}}$. Με $\rho_{\text{υποθ.}} = 250 \text{ kN/mm}$
 LOAD-DEFLECTION CURVE OF THE PAD OF W13 FASTENING
 with the solution for finding the static ρ_{pad} . With $\rho_{\text{subgr}} = 250 \text{ kN/mm}$

Με δεδομένα/ With data: $Q_{\text{τροχού}} = Q_{\text{wheel}} = 11,25 \text{ t}$ (το οποίο θα χρησιμοποιηθεί και όχι το συνολικό φορτίο/ which should be used and not the total load), μέγιστη ταχύτητα/ maximum speed 200 km/h, απόσταση στρωτήρων/ distance between the sleepers $\ell = 60 \text{ cm}$, εύρος γραμμής/ track gauge 1435 mm, και διακύμανση του ρ / and ρ fluctuating:

$\rho_{\text{υποδομής}} = \rho_{\text{subgrade}} = 250 \text{ kN/mm}$,

$\rho_{\text{σιδ/χιας}} = \rho_{\text{rail}} = 75000 \text{ kN/mm}$, $\rho_{\text{σκυρούς}} = \rho_{\text{ballast}} = 380 \text{ kN/mm}$, $\rho_{\text{στρωτήρα}} = \rho_{\text{sleeper}} = 13500 \text{ kN/mm}$,

Σιδηροτροχιά UIC 60, με τα στοιχεία του παρακάτω πίνακα/
 Rail UIC60 with data of the following table:

	J [mm ⁴]	Βάρος weight [kg/m]
UIC 60	3,06E+07	60,00

$E = 210 \text{ kN/mm}^2$

Στρωτήρα ολόσωμο από προεντεταμένο σκυρόδεμα, B70, με τα στοιχεία του παρακάτω πίνακα/
 Monoblock sleeper of prestressed concrete, B70, with data of the following table:

	Βάρος Weight [kg]	Επιφάνεια Εδρασης Seating Surface (mm ²)
Ολόσωμος στρωτήρας από προεντεταμένο σκυρόδεμα B70 Monoblock sleeper B70	320,00	290.900,00

Με δεδομένες τις σχέσεις για το στατικό φορτίο και τη δυναμική ακαμψία της γραμμής/ from the following equations:

$$\bar{A}_{\text{στατικό}} = \bar{A}_{\text{stat}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \cdot \rho_{\text{ολικο}}}{E \cdot J}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \cdot \rho_{\text{total}}}{E \cdot J}} \text{ και/and}$$

$$h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}} = h_{\text{TRACK}} = \frac{\rho_{\text{ολικο}}}{\bar{A}_{\text{στατικό}}} = \frac{\rho_{\text{total}}}{\bar{A}_{\text{stat}}}$$

Για το παραπάνω διάγραμμα φορτίου – απόκρισης του υποθέματος του συνδέσμου W13 να υπολογισθεί το $\rho_{\text{υποθέματος}}$ σύμφωνα με το παράδειγμα του Κεφαλαίου 9 του βιβλίου «Δράσεις στη Σιδηροδρομική Γραμμή».

For the above Load-Deflection curve of the pad of the fastening W13, calculate the ρ_{pad} according the example of the chapter 9 of the book “Actions on the Railway Track”.

Σύσφιγξη (δύναμη ασκούμενη στο πέλμα της σιδηροτροχιάς από τη σύσφιγξη του συνδέσμου) από ένα συνδέσμο 9 kN. Κάθε υπόθεμα συσφίγγεται από 2 συνδέσμους.

Toe-load (force acting on the foot of each rail due to the tightening of the fastening) from one fastening 9 kN. Each pad is tightened by two fastenings.

Θα πρέπει να κάνετε μια αρχική εκτίμηση/υπόθεση ενός συντελεστή $\rho_{\text{υποθέματος}}$
Initially you should estimate/(make a hypothesis) a coefficient of pad ρ_{pad} .

Θα υπολογίσετε το $\rho_{\text{ολικό}}$.
You should calculate ρ_{total} .

Θα υπολογισθεί η αντίδραση R του στρωτήρα (στατική).
Calculate the reaction R on each sleeper (static).

Από αυτήν θα υπολογισθεί η πρόσθετη βύθιση του υποθέματος και θα επαληθευθεί ή όχι αν η αρχική εκτίμηση για το $\rho_{\text{υποθέματος}}$ ήταν σωστή ή όχι. Αν δεν ήταν χρησιμοποιώντας τη νέα τιμή ξανακάνουμε τη διαδικασία (συγκλίνει στις 2 με τρεις φορές).

From this calculated R you should calculate the additional deflection/subsidence of the pad and you should verify or not if your initial estimation/hypothesis for ρ_{pad} was correct or not. If it was not you should repeat the procedure using the new value of ρ_{pad} (the procedure converges in 3 to 4 repetitions).

ΕΠΙΛΥΣΗ/ SOLUTION

1^η δοκιμή/ 1st Trial

Αρχική υπόθεση/ we estimate for beginning $\rho_{\text{υποθέματος}} = \rho_{\text{pad}} = 35$ υπολογίζεται το στατικό/ and the total $\rho_{\text{ολικό}} = \rho_{\text{total}} = 28,34 \text{ kN/mm}$

Και/And $\bar{A} = 0,34942 \Rightarrow R = 0,34942 \cdot 112,5 = 39,31 \text{ kN}$

Αρχική δύναμη σύσφιγξης/ Initial force acting on the foot of each rail due to the tightening of the fastening $2 \cdot 9 = 18 \text{ kN}$ και προκύπτει αρχική βύθιση από το διάγραμμα Φορτίου απόκρισης/ and from the Load-Deflection curve we receive $y_{\text{αρχική}} = y_{\text{initial}} = 0,75 \text{ mm}$

Συνολική δύναμη θλίψης στο υπόθεμα/ Total compressing force on the pad:
 $18 + 39,31 = 57,31 \text{ kN}$

Τοποθετούμε την τιμή στο διάγραμμα Φορτίου-Απόκρισης, και προκύπτει βύθιση
We put this value on the Load-Deflection curve and the following deflection (subsidence) is derived:

$y_{\text{ολική}} = y_{\text{total}} = 2,6 \text{ mm}$

Άρα/ Consequently $\Delta y = 2,6 - 0,75 = 1,85 \text{ mm}$

Το φορτίο που προκάλεσε την πρόσθετη βύθιση Δy , είναι το:
The load that provoked this additional subsidence is:
 $R = 39,31 \text{ [kN]}$

Συνεπώς/ Consequently $\rho_{\text{υποθεματος}} = \rho_{\text{pad}} = \frac{R}{\Delta y} = \frac{39,31}{1,85} = 21,25 \quad \text{kN/mm}$

Το οποίο διαφέρει από την αρχική υπόθεση/ which differs from the initial hypothesis.

2^η δοκιμή/ 2nd Trial

Επαναλαμβάνουμε τον κύκλο σε νέα δοκιμή που ξεκινά με την υπόθεση

We repeat the “loop” with a new trial taking this time the value :

$\rho_{\text{υποθεματος}} = \rho_{\text{pad}} = 21,25 \Rightarrow \rho_{\text{ολικό}} = \rho_{\text{total}} = 18,56 \text{ και/and}$

$\bar{A} = 0,31433 \Rightarrow R = 0,31433 \cdot 112,5 = 35,36 \text{ kN}$

Παραμένει η ίδια Αρχική δύναμη σύσφιγξης/ the force on the toe of the rail is the same $2 \cdot 9 = 18 \text{ kN}$ και προκύπτει αρχική βύθιση από το διάγραμμα Φορτίου-Απόκρισης/ and we receive from the Load-Deflection curve the initial subsidence: $y_{\text{αρχική}} = y_{\text{initial}} = 0,75 \text{ mm}$

Συνολική δύναμη θλίψης στο υπόθεμα/ Total compressing force on the pad:
 $18 + 35,36 = 53,36 \text{ kN}$

Τοποθετούμε την τιμή στο διάγραμμα Φορτίου-Απόκρισης, και προκύπτει βύθιση
 We put this value on the Load-Deflection curve and the following deflection (subsidence) is derived:

$y_{\text{ολική}} = y_{\text{total}} = 2,5 \text{ mm}$

Άρα/ Consequently $\Delta y = 2,5 - 0,75 = 1,75 \text{ mm}$

Το φορτίο που προκάλεσε την πρόσθετη βύθιση Δy , είναι το:

The load that provoked this additional subsidence is:

$R = 35,36$

Συνεπώς/ Consequently $\rho_{\text{υποθεματος}} = \rho_{\text{pad}} = \frac{R}{\Delta y} = \frac{35,36}{1,75} = 20,21 \quad \text{kN/mm}$

Το οποίο αποκλίνει από την αρχική υπόθεση/ which differs from the initial hypothesis..

3^η δοκιμή/ 3rd Trial

Επαναλαμβάνουμε τον κύκλο σε νέα δοκιμή που ξεκινά με την υπόθεση

We repeat the “loop” with a new trial taking this time the value :

$\rho_{\text{υποθεματος}} = \rho_{\text{pad}} = 20,20 \Rightarrow \rho_{\text{ολικό}} = \rho_{\text{total}} = 17,79 \text{ και/and}$

$\bar{A} = 0,31101 \Rightarrow R = 0,31101 \cdot 112,5 = 34,98 \text{ kN}$

Παραμένει η ίδια Αρχική δύναμη σύσφιγξης/ the force on the toe of the rail is the same $2 \cdot 9 = 18 \text{ kN}$ και προκύπτει αρχική βύθιση από το διάγραμμα Φορτίου-

Απόκρισης/ and we receive from the Load-Deflection curve the initial subsidence:
 $y_{αρχική} = y_{initial} = 0,75 \text{ mm}$

Συνολική δύναμη θλίψης στο υπόθεμα/ Total compressing force on the pad :
 $18 + 34,98 = 52,98 \text{ kN}$

Τοποθετούμε την τιμή στο διάγραμμα Φορτίου-Απόκρισης και προκύπτει βύθιση/ We put this value on the Load-Deflection curve and the following deflection (subsidence) is derived:

$$y_{ολική} = y_{total} = 2,48 \text{ mm}$$

Άρα/ Consequently $\Delta y = 2,48 - 0,75 = 1,73 \text{ mm}$

Το φορτίο που προκάλεσε την πρόσθετη βύθιση Δy , είναι το:
 The load that provoked this additional subsidence is:
 $R = 34,98$

Συνεπώς/Consequently

$$\rho_{υποθέματος} = \rho_{pad} = \frac{R}{\Delta y} = \frac{34,98}{1,73} = 20,219 \approx 20,20 \text{ kN/mm}$$

Το οποίο συμπίπτει με την αρχική υπόθεση/ which converges and it is very close to the initial hypothesis.

Άρα/ Consequently $\rho_{υποθέματος} = 20,20$

Από τον ακόλουθο τύπο μπορούμε να υπολογίσουμε το δυναμικό ρ του υποθέματος.
 From the following equation we can calculate the dynamic ρ of the pad.

$$\rho_{δυναμικο/dynamic} = \frac{\rho_{στατικό/static}}{A_{στατικό/static}}$$