

Επιρροή της Απόσβεσης της Γραμμής στη Μάζας Γραμμής που συμμετέχει στην Κίνηση των Μη Ανηρτημένων Μαζών των Σιδηροδρομικών Οχημάτων - Θεωρητικός Υπολογισμός και Σύγκριση με Μετρήσεις

Κ. Γιαννακός

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, F.ASCE, M.TRB-AR050-060

Επισκέπτης Καθηγητής Σιδηροδρομικής (Π.Δ.407/80)

Πανεπ. Θεσσαλίας, Σχ. Πολιτικών Μηχανικών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ: Τα σύγχρονα σιδηροδρομικά οχήματα διαθέτουν πρωτεύουσα και δευτερεύουσα ανάρτηση. Οι Μη Ανηρτημένες Μάζες (Μ.Α.Μ.) ενός σιδηροδρομικού οχήματος βρίσκονται "κάτω" από την πρωτεύουσα ανάρτηση (δηλαδή οι τροχοί, οι άξονες και -πιθανώς- ένα τμήμα του ηλεκτροκινητήρα στην περίπτωση που δεν έχει πλήρως αναρτηθεί από το φορείο), και δρουν χωρίς καμία απόσβεση απευθείας επί της γραμμής. Όμως και ένα τμήμα της μάζας της σιδηροδρομικής γραμμής συμμετέχει επίσης στην κίνηση των Μη Ανηρτημένων Μαζών των οχημάτων. Για να υπολογισθούν τα φορτία -και στη συνέχεια οι δράσεις- επί της εσχάρας της γραμμής στις θέσεις στήριξης της σιδηροτροχιάς, τους στρωτήρες, τη στιγμή που ένας μεμονωμένος άξονας διέρχεται, είναι αναγκαίο να καθορισθεί η μάζα γραμμής που συμμετέχει στην κίνηση. Στο παρόν άρθρο η σιδηροδρομική γραμμή προσομοιώνεται ως ταλαντούμενη χορδή. Η κίνησή της αναλύεται θεωρητικά και υπολογίζεται το μήκος της που συμμετέχει και επηρεάζει την κίνηση των Μη Ανηρτημένων Μαζών. Τα αποτελέσματα του θεωρητικού υπολογισμού συγκρίνονται με τα αποτελέσματα των μετρήσεων που έχουν διεξαχθεί σε διάφορες χώρες. Επίσης εξετάζονται η επιρροή της δυναμικής δυσκαμψίας και η απόσβεση της γραμμής. Τέλος η επιρροή της μεταβολής του συντελεστή απόσβεσης ζ της γραμμής από 0,1 έως 0,3 επί της τιμής της μάζας γραμμής διερευνάται και συγκρίνεται με τις μετρήσεις.

Influence of the Track's Damping on the Track Mass Participating in the Motion of the Non Suspended Masses of Railway Vehicles - Theoretical Calculation and Comparison to Measurements

K. Giannakos

Civil Engineer PhD, F.ASCE, M.TRB-AR050-060

Visiting Professor of Railways (P.D.407/80)

Univ. of Thessaly, Fac. of Civil Engineering

ABSTRACT: The modern railway vehicles are equipped with primary and secondary suspension. The Non Suspended Masses (N.S.M.) of a railway vehicle are the masses that are located under the primary suspension (that is the wheels, the axles and – possibly – some parts of the electric-motors in the case that they are not suspended on the frames of the bogies), and act without damping directly on the track. Part of the mass of the railway track also participates in the movement of the Non Suspended Masses of the vehicles. In order to calculate the load -and after that the actions- on the track panel in the position of a sleeper at the time when an isolated axle of the vehicle passes, it is necessary to determine the mass of the railway track that participates in the movement. In this paper the track is modeled as a vibrating string. Its movement is analyzed theoretically, and the length that participates and influences the movement of the Non Suspended Masses is calculated. The result of the theoretical calculation is compared with the results of the measurements that have been carried out in a number of countries. The influence of the track's dynamic stiffness and damping is also investigated. Finally the influence of the variation of the track's damping coefficient ζ from 0.1 to 0.3 on the track mass's value is investigated and compared to the measurements.

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ¹

Η κίνηση των σιδηροδρομικών οχημάτων επί της σιδηροδρομικής γραμμής είναι τυχαίο φαινόμενο. Η δυναμική φόρτιση που δημιουργείται (προσαύξηση του στατικού φορτίου του τροχού) οφείλεται στην κίνηση του οχήματος και -κυρίως- από το κρουστικό φορτίο των Μη Ανηρτημένων Μαζών (Μ.Α.Μ.) του οχήματος (Γιαννακός & Βλασοπούλου, 1994), που διεγείρονται από τη γεωμετρία της επιφάνειας κύλισης των σιδηροτροχιών (και τα ελαττώματά της). Στην κίνηση των Μ.Α.Μ. του οχήματος συμμετέχει και ένα τμήμα της επιδομής της γραμμής και προσανξάνει την τιμή τους με συνέπεια να επηρεάζεται η δυναμική συνιστώσα των δράσεων. Στη συνέχεια θα διερευνηθεί η επιρροή της απόσβεσης της γραμμής στη μάζα γραμμής που συμμετέχει στην κίνηση των Μ.Α.Μ.

2 ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΡΑΣΕΩΝ/ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ ΕΠΙ ΣΤΡΩΤΗΡΩΝ

Η θεωρητική ανάλυση βασίζεται κυρίως στη θεωρία του Winkler (Winkler, 1867) για απειρομήκη δοκό επί ελαστικού εδάφους. Στη διεθνή βιβλιογραφία τέσσερεις μέθοδοι παρατίθενται κυρίως (βλ. Giannakos, 2010 α και Γιαννακός, 2010):

Μέθοδος στην Αμερικανική βιβλιογραφία

Όπως περιγράφεται στα: Hay (1982, σελ. 247-273), AREMA (2005, σελ. 16-10-26 έως 16-10-32 και Κεφάλαιο 30), Selig & Waters (1994/2000, σελ.5.1-5.4 κ.λπ.). Η πλέον δυσμενής περίπτωση για δράση/αντίδραση σε κάθε σημείο στήριξης (στρωτήρα) δίδεται (βλ. Giannakos, 2011):

$$R_{\max} = \bar{A}_{\text{στατ}} \cdot \left(1 + \frac{D_{33} \cdot V}{D_{\text{τροχου}} \cdot 100} \right) \cdot Q_{\text{τροχου}} \quad (1)$$

όπου: $Q_{\text{τροχου}}$ το στατικό φορτίο ανά τροχό, D_{33} σε ίντσες η διάμετρος ενός τροχού 33 ίντσών, $D_{\text{τροχου}}$ σε ίντσες η διάμετρος ενός τροχού του εξεταζόμενου οχήματος, V η ταχύτητα σε miles/h, και $\bar{A}_{\text{στατ}}$ ο ίδιος συντελεστής (αδιάστατος) όπως στην Ευρωπαϊκή βιβλιογραφία παρακάτω και δίδεται από τον τύπο:

$$\bar{A}_{\text{στατ}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \cdot \rho_{\text{ολικο}}}{E \cdot J}} \quad (2)$$

όπου: $\rho_{\text{ολικο}}$ το "μέτρο έδρασης της σιδηροτροχιάς" (rail support modulus) ή "ολική στατική δυσκαμψία της γραμμής" (total track static stiffness) σε kN/mm, ℓ η απόσταση μεταξύ των στρωτήρων, E , J το μέτρο ελαστικότητας και η ροπή αδρανείας της σιδηροτροχιάς.

Μέθοδος στην Γερμανική βιβλιογραφία

Στη Γερμανική βιβλιογραφία, γνωστή ως μέθοδος Zimmermann (Zimmermann, 1941), η πλέον δυσμενής αντίδραση/δράση ανά στρωτήρα $R_{\max}$ εξαρτάται από την πιθανότητα P "μη υπέρβασης" και για $P = 99.7\%$ δίδεται από (Fastenrath, 1981, Eisenmann, 2004):

¹ Το θέμα των Μη Ανηρτημένων Μαζών το διερευνούσα την εποχή που εκπονούσα τη διδακτορική μου διατριβή στο Α.Π.Θ., υπό την επίβλεψη του Γιώργου Γιαννόπουλου. Πολλά από τα στοιχεία που περιλαμβάνονται στο άρθρο έχουν παρουσιασθεί στην εργασία μου "Διαχείριση Σιδηροδρομικής Υποδομής" για το μάθημα του κ. Μουρατίδη (που είχα παρακολουθήσει κατά τη διάρκεια της) και στο τελικό κείμενο της διδακτορικής μου διατριβής, αφού αφορά θέματα σιδηροδρομικών υποδομών υψηλών ταχυτήτων και "διαλειτουργικών" σιδηροδρομικών δικτύων.

$$R_{\max} = Q_{\text{τροχού}} \left(1 + 0.9 \cdot \left(1 + \frac{V - 60}{140} \right) \right) \cdot \bar{A}_{\text{στατ}} \quad (3)$$

$$\text{για } V \geq 60 \text{ km/h. Εάν } V < 60 \text{ km/h τότε } R_{\max} = 1.9 \cdot Q_{\text{τροχού}} \cdot \bar{A}_{\text{στατ}} \quad (3a)$$

Μέθοδος στην Γαλλική βιβλιογραφία

Η μέθοδος που παρατίθεται στη Γαλλική βιβλιογραφία (Alias, 1984 και Prud'homme A., & Eriean, 1976) καλύπτει μια πιθανότητα P "μη υπέρβασης" 95.5%, διανέμει το συνολικό φορτίο στο στρωτήρα, κάτω από τη θέση του φορτίου με συντελεστή 1.35· $\bar{A}_{\text{στατ}}$:

$$R_{\max} = \bar{A}_{\text{στατ}} \cdot 1.35 \cdot \left[Q_{\text{τροχού}} \cdot \left(1 + \frac{Q_{\alpha}}{Q_{\text{τροχού}}} \right) + 2 \cdot \sqrt{\sigma(\Delta Q_{\text{MAM}})^2 + \sigma(\Delta Q_{\text{AM}})^2} \right] \quad (4)$$

όπου Q_{α} = το φορτίο λόγω ανεπάρκειας υπερύψωσης, 2 συντελεστής δυναμικής φόρτισης για πιθανότητα "μη υπέρβασης" 95.5 %, $\sigma(\Delta Q_{\text{MAM}})$ =τυπική απόκλιση της δυναμικής συνιστώσας του φορτίου της οφειλόμενης στις Μη Ανηρτημένες Μάζες (MAM) του οχήματος, $\sigma(\Delta Q_{\text{AM}})$ = τυπική απόκλιση της δυναμικής συνιστώσας του φορτίου της οφειλόμενης στις Ανηρτημένες Μάζες (AM) του οχήματος.

Μέθοδος Giannakos (2004)

Μετά από υπερδεκαετές ερευνητικό πρόγραμμα, στο ελληνικό σιδηροδρομικό δίκτυο, λόγω εμφάνισης εκτεταμένων ρηγματώσεων σε στρωτήρες σκυροδέματος τοποθετημένους στη γραμμή, σε ποσοστό μεγαλύτερο από 60%, αναπτύχθηκε από το συγγραφέα η μέθοδος αυτή για τις πραγματικές συνθήκες της γραμμής (Γιαννακός, 2002, Giannakos, 2004, Giannakos & Loizos, 2009). Οι δράσεις/αντιδράσεις στην εσχάρα γραμμής υπολογίζονται για πιθανότητα "μη υπέρβασης" 99.7%:

$$R_{\max} = (Q_{\text{τροχού}} + Q_{\alpha}) \cdot \bar{A}_{\text{δυναμ}} + 3 \cdot \sqrt{\sigma(\Delta Q_{\text{MAM}})^2 + \sigma(\Delta Q_{\text{AM}})^2} \quad (5)$$

όπου $\bar{A}_{\text{δυναμ}}$ = αδιάστατος δυναμικός συντελεστής αντίδρασης του στρωτήρα, 3 συντελεστής δυναμικής φόρτισης για πιθανότητα "μη υπέρβασης" 99.7 %, $\sigma(\Delta Q_{\text{MAM}})$ =τυπική απόκλιση της δυναμικής συνιστώσας του φορτίου της οφειλόμενης στις Μη Ανηρτημένες Μάζες (MAM) του οχήματος, $\sigma(\Delta Q_{\text{AM}})$ = τυπική απόκλιση της δυναμικής συνιστώσας του φορτίου της οφειλόμενης στις Ανηρτημένες Μάζες (AM) του οχήματος (για λεπτομέρειες βλ. Giannakos & Loizos, 2009) και:

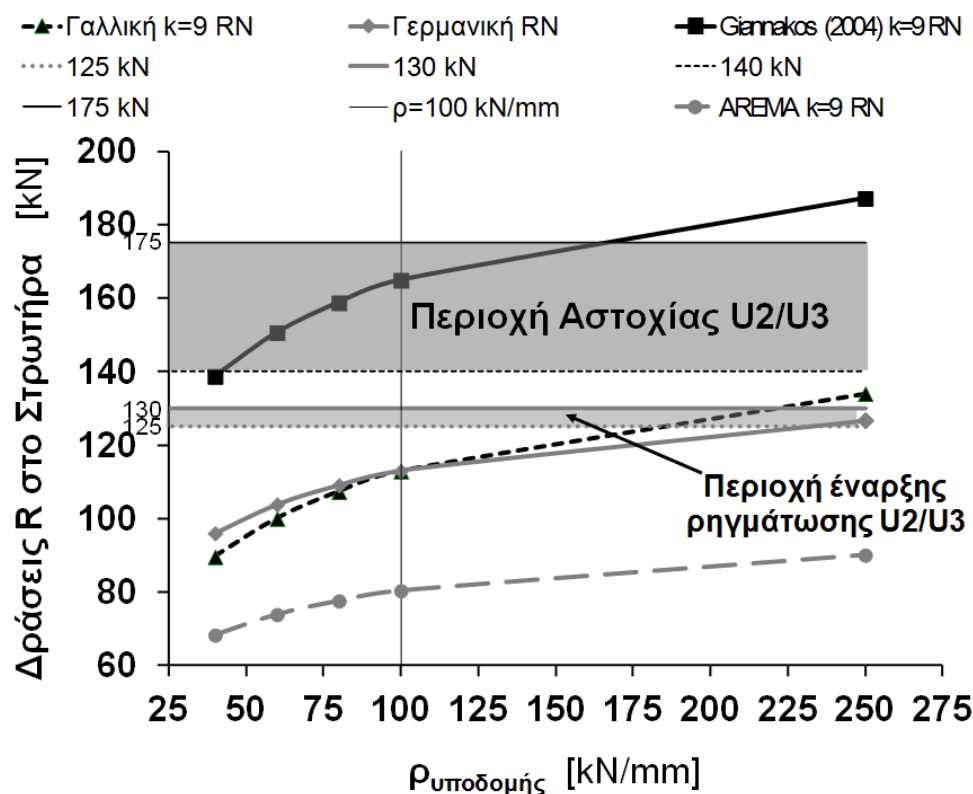
$$\bar{A}_{\text{δυναμ}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\ell^3 \cdot h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}}{E \cdot J}} \quad (6)$$

όπου $h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}$ η συνολική δυναμική δυσκαμψία της γραμμής που δίδεται από τον τύπο:

$$h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}} = \frac{Q_{\text{ολικο}}}{y} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{E \cdot J \cdot \frac{\rho_{\text{ολικο}}}{\ell}} \quad (7)$$

όπου y η βύθιση της γραμμής που προκαλείται από το $Q_{\text{ολικο}}$.

Η μέθοδος αυτή προβλέπει την παρατηρηθείσα εκτεταμένη ρηγμάτωση επί του ελληνικού σιδηροδρομικού δικτύου (σε ποσοστό άνω του 60% των επί γραμμής στρωτήρων σκυροδέματος U2/U3 βλ. Γιαννακός & Βλασοπούλου, 1994 και Γιαννακός, 2002) σε αντίθεση με τις άλλες τρεις μεθόδους που προβλέπουν ή καθόλου (0%) ή σποραδική ρηγμάτωση (της τάξεως 1-2%), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



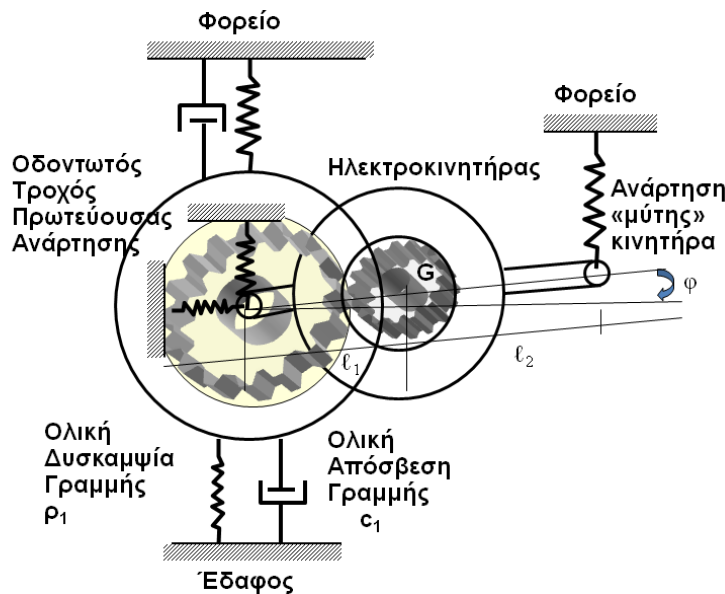
Σχήμα 1 Δράσεις επί της εσχάρας της γραμμής στα σημεία στήριξης της σιδηροτροχιάς (στρωτήρες) σύμφωνα με (1) τη μέθοδο της Γερμανικής βιβλιογραφίας (Εξισ. 3), (2) τη μέθοδο της Γαλλικής βιβλιογραφίας (Εξισ. 4), (3) τη μέθοδο της Αμερικανικής βιβλιογραφίας (Εξισ. 1) και (4) τη μέθοδο Giannakos (2004). Φαίνονται με σκίαση οι περιοχές ρηγμάτωσης και αστοχίας για τους διμερείς στρωτήρες σκυροδέματος τύπου U2/U3.

3 ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΟΧΗΜΑΤΟΣ - ΣΙΔΗΡ. ΓΡΑΜΜΗΣ ΩΣ ΣΥΝΟΛΟ ΕΛΑΤΗΡΙΩΝ ΑΠΟΣΒΕΣΤΗΡΩΝ

Είναι πλέον ξεκάθαρο ότι οι Μ.Α.Μ. παίζουν καθοριστικό ρόλο στην καταπόνηση της γραμμής όχι μόνο στη Γαλλική (Alias, 1984) και την Ελληνική βιβλιογραφία (Γιαννακός, 2002) αλλά και στη Γερμανική (Muller-Boruttau et al. 1998). Κατά την κίνηση ενός σιδηροδρομικού οχήματος επί της σιδηροδρομικής γραμμής υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ τους και ουσιαστικά λειτουργούν ως ένα σύστημα "σιδηροδρομικό όχημα - σιδηροδρομική γραμμή" ή επί το απλούστερον "όχημα - γραμμή". Το όχημα -στους σύγχρονους σιδηροδρόμους, διαλειτουργικούς και υψηλών ταχυτήτων- διαθέτει σύστημα ανάρτησης με δύο επίπεδα: την πρωτεύουσα και τη δευτερεύουσα. Όσες μάζες του οχήματος βρίσκονται κάτω από την πρωτεύουσα ανάρτηση επιπίπτουν χωρίς καμμία απολύτως απόσβεση επί της γραμμής επιφέροντας ένα πολύ σημαντικό κρουστικό φορτίο επ' αυτής. Η πρωτεύουσα ανάρτηση αποτελείται από τους δύο τροχούς κάθε άξονα, τον άξονα και σε περίπτωση κινητήριας μονάδας (Γιαννακός, 2004, 2000, Giannakos 2004, Alias 1984):

(α) με ημιανηρητημένο ηλεκτροκινητήρα (βλ. Σχήμα 2) οπότε ένα μέρος της μάζας του κινητήρα αναρτάται στο φορείο και ένα μέρος της μάζας του αναρτάται στον άξονα, οι Μ.Α.Μ. προσανυζάνονται με το τμήμα της μάζας του ηλεκτροκινητήρα που

"φορτίζει" τον άξονα, συν τα "γρανάζια" μετάδοσης κίνησης του άξονα. Η τιμή της μάζας αυτής δίδεται από τον κατασκευαστή του τροχαίου υλικού.



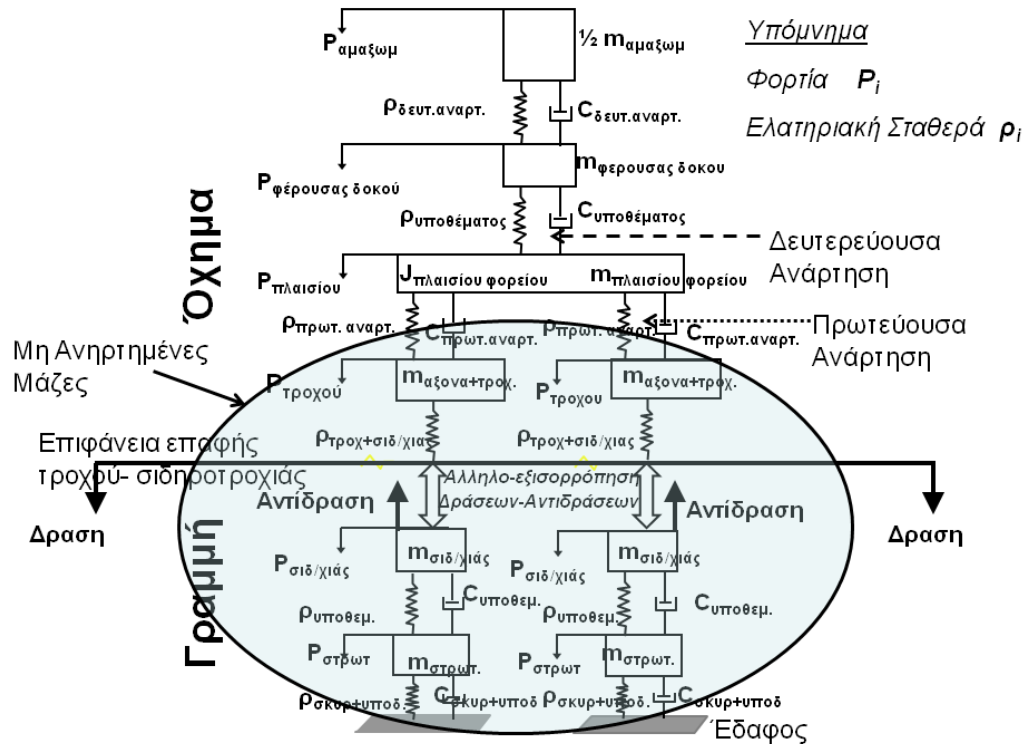
Σχήμα 2: Ημιανηρτημένος ηλεκτροκινητήρας στο φορείο και στον άξονα του οχήματος.

(β) με πλήρως ανηρτημένο κινήτρια οπότε ολόκληρη η μάζα του κινήτρια αναρτάται στο φορείο, τότε η επιβάρυνση του άξονα είναι μηδενική και δεν προσανξάνονται οι Μ.Α.Μ.

Επιπλέον των μερών των οχημάτων που βρίσκονται κάτω από την πρωτεύουσα ανάρτησή τους και ένα τμήμα της επιδομής της γραμμής συμμετέχει στην κίνηση των Μη Ανηρτημένων Μαζών του οχήματος και συνεπώς προστίθεται στην τυπική απόκλιση $\sigma(\Delta Q_{MAM})$.

Στο παρελθόν ο συγγραφέας του παρόντος έχει παρουσιάσει τρία άρθρα (Γιαννακός, 2001, Giannakos, 2007, 2010 b) σε μια προσπάθεια προσέγγισης της θεωρητικής και της πρακτικής πλευράς του θέματος όπως προκύπτει από μετρήσεις επί γραμμής. Τρεις θεωρητικοί υπολογισμοί έχουν ήδη δημοσιευθεί: (α) χρησιμοποιώντας το συντελεστή στατικής δυσκαμψίας της γραμμής $\rho_{ολικο}$ (β) χρησιμοποιώντας το συντελεστή δυναμικής δυσκαμψίας της γραμμής $h_{ΓΡΑΜΜΗΣ}$ και (γ) χρησιμοποιώντας το συντελεστή δυναμικής δυσκαμψίας της γραμμής $h_{ΓΡΑΜΜΗΣ}$ και την επιρροή της απόσβεσης της γραμμής για τιμή του συντελεστή απόσβεσης $\zeta=0,30$. Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται μια παραμετρική επίλυση για την επιρροή της μεταβολής της απόσβεσης της γραμμής όπως εκφράζεται από το συντελεστή απόσβεσης ζ σε πραγματικές συνθήκες σε μια παραμετρική διερεύνηση για τιμές του ζ κυμαινόμενες από 0,10 - 0,30. Τα αποτελέσματα των θεωρητικών λύσεων συγκρίνονται με αποτελέσματα πειραματικών μετρήσεων επί γραμμής.

Το μοντέλο "οχήματος-γραμμής" παρουσιάζεται στο Σχήμα 3 όπου εμφανίζονται και η πρωτεύουσα και η δευτερεύουσα ανάρτηση του οχήματος όπως και η μάζα γραμμής που συμμετέχει στην κίνηση.



Σχήμα 3: Προσομοίωση συστήματος "όχημα - γραμμή" ως σύνολο ελατηρίων (με συντελεστή ρ_i και αποσβεστήρων με συντελεστή c_i). Φαίνεται η πρωτεύουσα και η δευτερεύουσα ανάρτηση όπως και οι Μη Ανηρτημένες Μάζες στην έλλειψη με σκίαση.

4 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΠΟΥ ΣΥΜΜΕΤΕΧΕΙ ΣΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΤΩΝ Μ.Α.Μ.

Η ιδιοσυχνότητα ενός συστήματος -όπως η σιδηροδρομική γραμμή- μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση ελεύθερης ταλάντωσης, χωρίς απόσβεση και χωρίς διεγείρουσα δύναμη από την ακόλουθη εξίσωση (αρχικές δημοσιεύσεις Γιαννακός, 2001, Giannakos, 2010 b):

$$(m_{\text{MAM}} + m_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}) \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}} \cdot y = 0 \quad (8)$$

όπου $h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}$ από την Εξισ. (7).

Αν αμελήσουμε κατ' αρχάς τη μάζα γραμμής που συμμετέχει στην κίνηση των Μ.Α.Μ. η Εξισ. (8) γίνεται:

$$m_{\text{MAM}} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}} \cdot y = 0 \quad (8a)$$

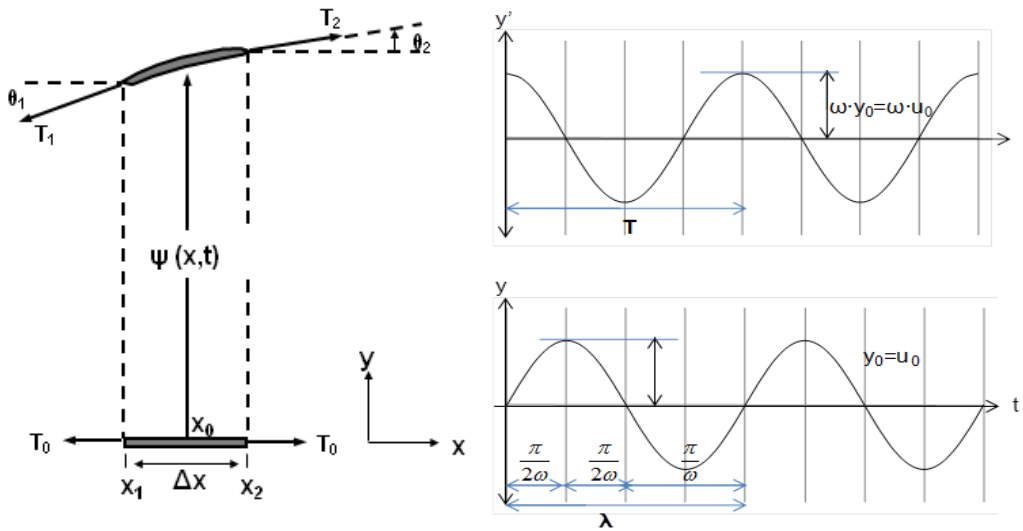
Για να υπολογίσουμε όμως την παραλειφθείσα μάζα γραμμής (Σχ. 4 δεξιά):

$$m_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}} = \int_0^{k \cdot T} m \cdot dx \quad (9)$$

όπου k ακέραιος που πρέπει να καθορισθεί.

Η $m_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}$ αντιστοιχεί στο μήκος κύματος λ της γραμμής ή το διπλάσιο του μήκους μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της πρώτης παραγώγου y' , αφού η γραμμή δεν

κινείται καθόλου στις θέσεις μηδενισμού της πρώτης παραγώγου που είναι η ταχύτητα κίνησης της γραμμής, Θα πρέπει να υπολογισθεί το μήκος κύματος λ . Η βύθιση y δίδεται (Γιαννακός, 2002):



Σχήμα 4: Δράσεις δυνάμεις σε ταλαντούμενη χορδή (αριστερά) και ημιτονοειδής ταλάντωση με αρχικές συνθήκες $y(0)=u(0)=0$ και $y'(0)=u'(0)=v'$ (δεξιά)

$$y = \frac{Q_{\text{τροχού}} \cdot K}{2U} e^{-Kx} (\cos Kx + \sin Kx) = y_{\max} \cdot \eta(x) \quad (10)$$

όπου $K = \frac{1}{L} = \sqrt[4]{\frac{U}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{\rho_{\text{ολικο}}}{4EJ\ell}}$, και $\eta(x) = e^{-Kx} \cdot [\cos Kx + \sin Kx]$ και συνεπώς:

$$y_{\max} = \frac{Q_{\text{τροχού}} \cdot K}{2U} = y_0 \text{ (στη θέση εφαρμογής του φορτίου και } \frac{Q}{U \cdot y_0} = \frac{2}{K} \quad (11)$$

αξίζει να σημειωθεί ότι η $\eta(x)$ μηδενίζεται στα σημεία: $\cos Kx = -\sin Kx \rightarrow Kx = \frac{3\pi}{4} + n\pi$

Η περίοδος $T=2\pi$, και τα σημεία μηδενισμού: $x_1 = \frac{3\pi}{4K}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4K} + 2\pi = \frac{11\pi}{4K} \rightarrow$

$$\lambda = \frac{8\pi}{4K} = 2\pi \cdot \sqrt[4]{\frac{4EJ}{U}} = 2\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \sqrt[4]{\frac{EJ}{U}} \Rightarrow \frac{\lambda}{\pi} = \frac{2}{K} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{EJ}{U}}, \text{ όπου } U = \rho_{\text{ολικο}}/\ell \quad (12)$$

Σε μια ταλάντωση το μήκος κύματος λ στο "χωρικό πεδίο" αντιστοιχεί στην περίοδο T στο "πεδίο συχνοτήτων", είναι ποιοτικά ίδιες παράμετροι. Εξ ορισμού το μήκος κύματος λ "διανύεται" σε χρόνο μιας περιόδου T . Από την κλασική φυσική η γενική εξίσωση ενός ημιτονοειδούς κύματος είναι (Resnick et al., 1966):

$$y = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t - \varphi) \quad (13)$$

όπου $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ είναι ο γωνιακός κυματικός αριθμός (Φυσική, τομ. 3, Berkeley, σελ. 65) σε rad/m που χαρακτηρίζει μία ταλάντωση στο "χωρικό πεδίο" και ω η γωνιακή ταχύτητα ή γωνιακή συχνότητα (Φυσική, τομ. 1, Berkeley, σελ. 34, 36) $\omega = \frac{2\pi}{T}$, που χαρακτηρίζει μία ταλάντωση στο "πεδίο συχνοτήτων" με ανάλογο τρόπο, ϕ η γωνία φάσης, and σ ο κυματικός αριθμός $\sigma = \frac{1}{\lambda}$.

Η γενική εξίσωση που περιγράφει τη διάδοση ενός κύματος κατά μήκος μιας χορδής ή μιας επιμήκου κατασκευής (όπως π.χ. η γραμμή) η οποία συμπεριφέρεται όπως μια χορδή (Σχήμα 4 αριστερά), είναι η ακόλουθη (σε συγκεκριμένο σημείο $x_i = \frac{\pi}{k} \Rightarrow k \cdot x_i = \pi$ από την Εξίσ. 13):

$$y = y_0 \cdot \sin(\pi - (\omega t + \phi)) = y_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (14)$$

Σε ημιτονοειδή ταλάντωση: $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ που αντιστοιχεί σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς, όπως και στο μήκος κύματος: $\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{k}$. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος v :

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \text{ και για } \phi = -\frac{\pi}{2}, \text{ από (Εξίσ.13)} \Rightarrow y = y_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-kx + \omega t)\right) = y_0 \cdot \cos(-kx + \omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = y_0 \cdot \cos(kx - \omega t) = y_0 \cdot \cos(kx - kv t) = y_0 \cdot \cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \quad (15)$$

Θέτοντας $z = x - vt$ έχουμε :

$$y = y_0 \cdot \cos\frac{2\pi}{\lambda} \cdot z \text{ στο "χωρικό πεδίο" και } y = y_0 \cdot \cos \omega t = y_0 \cdot \cos\frac{2\pi}{T} t \quad (16)$$

στο "πεδίο συχνοτήτων".

Ο γωνιακός κυματικός αριθμός k και η γωνιακή ταχύτητα ή γωνιακή συχνότητα ω εκφράζουν το ίδιο στάσιμο κύμα με διαφορετικές εξισώσεις παρόμοιας μορφής (Φυσική, τομ. 3, Berkeley, σελ. 65):

$$\psi(x, t) = A \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = A \cdot \sin 2\pi vt \cdot \sin 2\pi \sigma x = A \cdot \sin \omega t \cdot \sin kx \quad (17)$$

Επιπλέον για τα στάσιμα κύματα η ακόλουθη εξίσωση ισχύει ως γενική μορφή (Φυσική, τομ. 3, Berkeley, σελ. 62):

$$\psi(x, t) = A(x) \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (18)$$

της οποίας η δεύτερη παράγωγος ως προς το χρόνο t δίνει την επιτάχυνση:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi = -\omega^2 \cdot A(x) \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (19)$$

και η δεύτερη παράγωγος ως προς την τετμημένη (στο "χωρικό πεδίο") x είναι (Σχ. 4 αριστ.):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \cos(\omega t + \varphi) \cdot \frac{d^2 A(x)}{dx^2} \quad (20)$$

Αν δεχθούμε (για λόγους απλούστευσης) ότι οι ταλαντώσεις είναι γραμμικές, δηλαδή λαμβάνουν χώρα μόνον κατά μήκος του άξονα x (Σχ. 4 αριστ.), τότε για ένα στοιχειώδες τμήμα μάζας ΔM της ταλαντούμενης χορδής με μήκος Δx και κέντρο x_0 θα ισχύει:

$$\Delta M = \rho_0 \cdot \Delta x = m \cdot dx \quad (21)$$

όπου ρ_0 ή m η πυκνότητα μάζης ανά μονάδα μήκους Δx .

Η χορδή εντείνεται στα δύο της άκρα από δύο δυνάμεις: $T_1 \sin \theta_1$ αριστερά με κατεύθυνση προς τα κάτω και $T_2 \sin \theta_2$ στα δεξιά με κατεύθυνση προς τα άνω (Σχήμα 4 αριστερά). Η συνισταμένη δύναμη $F_x(t)$ είναι:

$$F_x(t) = T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 \quad (22)$$

Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε τη δύναμη $F_x(t)$ ως συνάρτηση της $\psi(x,t)$ και της πρώτης $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$ παραγώγου της στο "χωρικό πεδίο", που είναι η κλίση της χορδής στη θέση x_0 στο χρόνο t .

Για να διατυπώσουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης της χορδής θεωρούμε μικρές ταλαντώσεις ή ταλάντωση σπειροειδούς ελατηρίου. Υποθέτουμε ότι η εντείνουσα τη χορδή δύναμη T_0 είναι σταθερή και η χορδή σε ισορροπία. Στην προσέγγιση σπειροειδούς ελατηρίου η δύναμη T είναι μεγαλύτερη από την T_0 κατά ένα παράγοντα $1/\cos \theta$, επειδή το στοιχειώδες τμήμα έχει επιμηκυνθεί κατά ένα παράγοντα $1/\cos \theta$, συνεπώς $T \cos \theta = T_0$. Στην προσέγγιση μικρών ταλαντώσεων αμελείται η επιμήκυνση του στοιχειώδους τμήματος και θεωρούμε $\cos \theta \approx 1$, συνεπώς $T \cos \theta \approx T_0$ (Φυσική, τομ. 3, Berkeley, σελ. 60). Η Εξίσ. (22) γίνεται:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 \tan \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 \tan \theta_1 = T_0 \tan \theta_2 - T_0 \tan \theta_1 = \\ &= T_0 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_2 - T_0 \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_1 = T_0 \left[\left(\frac{d\psi}{dx} \right)_2 - \left(\frac{d\psi}{dx} \right)_1 \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \quad (24)$$

διατηρώντας το t σταθερό και αναπτύσσοντας μία σειρά Taylor περί το σημείο $x=x_2$:

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot \left(\frac{df}{dx} \right)_1 + \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1)^2 \cdot \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_1 + \dots \quad (25)$$

Αφού $x_2 - x_1 = \Delta x$, όπως προκύπτει από το Σχ.4 αριστερά, θεωρώντας ότι το Δx είναι πολύ μικρό και παίρνοντας το όριο (για πολύ μικρό Δx), οι τετραγωνικοί όροι και οι όροι μεγαλύτερης τάξης μπορούν να αμεληθούν:

$$f(x_2) - f(x_1) = \Delta x \cdot \left(\frac{df}{dx} \right)_1 = \Delta x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) = \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \quad (26)$$

και αντικαθιστώντας τις Εξισ. (24) και (26) στην (23), η συνολική δύναμη που ασκείται στο τμήμα Δx είναι:

$$F_x(t) = T_0 \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \quad (27)$$

Εφαρμόζοντας το Νόμο του Νεύτωνα $\Delta \text{δύναμη} = \text{Μάζα} \times \text{Επιτάχυνση}$:

$$F_x(t) = \Delta M \cdot \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} \quad (28)$$

όπου: $\psi(x,t)$ = μετατόπιση, $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$ = ταχύτητα, $\Delta M = \rho_0 \cdot \Delta x$, και $\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$ = επιτάχυνση

$$\text{Εξισώνοντας (27) and (28) έχουμε: } \rho_0 \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = F_x = T_0 \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \quad (29)$$

Δηλαδή:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \quad (30)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξισ. (19) και (20) στην (30):

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} = -\omega^2 \cdot \frac{\rho_0}{T_0} \cdot A(x) \quad (31)$$

Η γενική εξίσωση μιας ταλάντωσης στο "χωρικό πεδίο" μπορεί να αναγραφεί ως (Φυσική, τομ. 3, Berkeley, σελ. 62):

$$y = A(x) = A \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) + B \cdot \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \quad (32)$$

Το μήκος κύματος λ είναι σε μέτρα ανά κύκλο ταλάντωσης στο "χωρικό πεδίο" κατά μήκος του άξονα x , δηλαδή η απόσταση στην οποία συμπληρώνεται ένας πλήρης κύκλος. Παραγωγίζοντας δύο φορές:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot A(x) = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot y \quad (33)$$

Συγκρίνοντας τις Εξισ. (31) και (33) έχουμε:

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2 \cdot \left(\frac{\rho_0}{T_0}\right) = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \left(\frac{\rho_0}{T_0}\right) = (2\pi\nu)^2 \cdot \left(\frac{\rho_0}{T_0}\right) \quad (34)$$

Από τις Εξισ. (15) και (34) οδηγούμαστε στις:

$$\nu = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = T \cdot \nu \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{T}{2\pi} \cdot \nu \quad (35)$$

$$\frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} = \nu_0 = \text{σταθερά} \quad (36)$$

Η εξίσωση (35) προκύπτει στην περίπτωση στάσιμου κύματος στον άξονα rr' του Σχήματος 5 κινούνται αντίθετα δύο κύματα έχοντας ακριβώς την ίδια μορφή $x=asin(\omega t)$ συνεπώς στο σημείο O, $x=2asin(\omega t)$ και στο σημείο P(r) σε απόσταση +r (και -r) σε χρόνο r/v θα καταγραφούν ταλαντώσεις (Κανέλος, 1965, περισσότερες λεπτομέρειες στο Giannakos, 2010 b):

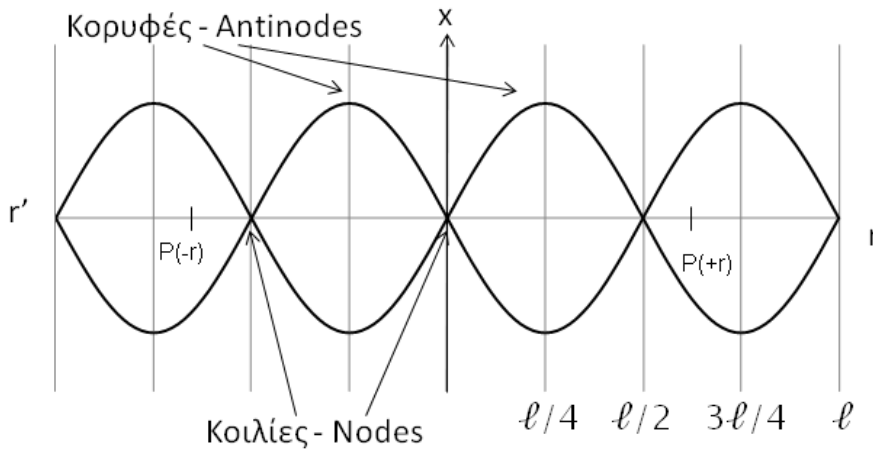
$$y_{+r} = a \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right], \quad y_{-r} = a \cdot \sin \left[\omega \left(t + \frac{r}{v} \right) \right] \quad (37)$$

Η αλληλεπίδραση των δύο κυμάτων δίδει ακριβώς την ίδια μορφή με την Εξίσ. (35) και (36) [βλ. Giannakos, 2010 b]. Σε ελεύθερη ταλάντωση ενός συστήματος "μάζα-ελατήριο" η μετατόπιση μπορεί να εκφρασθεί -με κατάλληλη εκλογή των αξόνων- ως (βλ. Σχ. 4 δεξιά):

$$y = y_0 \cdot \sin \omega_n t = u_0 \cdot \sin \omega_n t \Rightarrow y' = y_0 \cdot \omega_n \cdot \cos \omega_n t = u_0 \cdot \omega_n \cdot \cos \omega_n t \quad (38)$$

όπου η πρώτη παράγωγος είναι η ταχύτητα που μηδενίζεται στα σημεία $-\pi/2\omega$ και $+\pi/2\omega$ δηλαδή $-T/4$ και $+T/4$. Οι μέγιστες τιμές των y και y' δίδονται:

$$y_{\max} = u_0, \quad y'_{\max} = u_0 \cdot \omega_n \Rightarrow u_0 = \frac{y'_{\max}}{\omega_n} \quad (39)$$



Σχήμα 5 Στάσιμο κύμα

Από την Εξίσ. (29) αντικαθιστώντας m αντί ρ_0 και y αντί ψ έχουμε:

$$m \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=x_0} = T_0 \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} \quad (40)$$

Από την Εξίσ. (33) στο σημείο $x=x_0$ όπου $y_{\max}=u_0$ (βλ. Σχ. 4 δεξιά), για τη θέση όπου εφαρμόζει το φορτίο του άξονα του οχήματος και χρησιμοποιώντας την Εξίσ. (33) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=x_0} &= - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot u_0 = - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{\dot{u}}{\omega_n} = - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{v}{\omega_n} = - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{\lambda \cdot v}{\omega_n} = \\ &= - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{\lambda \cdot v \cdot T}{2\pi} = - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

και από την Εξισ. (33) και χρησιμοποιώντας την Εξισ. (38) και (15):

$$m \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=x_0} = -T_0 \cdot \Delta x \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \Rightarrow m \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=x_0} = -T_0 \quad (42)$$

Η Εξισ. (42) αναφέρεται στην δεξιά ή αριστερά τέμνουσα δύναμη αντίστοιχα στο σημείο εφαρμογής του φορτίου του άξονα του οχήματος. Η συνολική δύναμη είναι διπλάσια. Από τις Εξισ. (12) και (47) σε συνδυασμό με την (42) έχουμε:

$$T_{ολικη} = 2T_0 = m \cdot \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=x_0} = m \cdot \frac{Q}{U \cdot y_0} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=x_0} = m \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{EJ\ell}{\rho_{ολικο}}} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=x_0} \quad (43)$$

Η ανά μονάδα μήκους μάζα γραμμής ισούται με το βάρος σιδηροτροχιάς συν το βάρος του ημιστρωτήρα ανηγμένο ανά μέτρο μήκους το οποίο μπορεί να προστεθεί στη Εξισ. (8α). Συνεπώς στην Εξισ. (8α) ο όρος που έχει παραλειφθεί από την Εξισ. (8) είναι:

$$m_{\Gamma\text{PAMMH}\Sigma} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

που είναι ο αριστερός όρος της Εξισ. (40), η οποία σε συνδυασμό με την Εξισ. (42) και (43) δίδει:

$$m_{\Gamma\text{PAMMH}\Sigma} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = \int \rho_0 \cdot dx \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = m \cdot \frac{Q}{U \cdot y_0} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \Big|_{x=x_0} \quad (44)$$

αν ονομάσουμε y_0 τη βύθιση στο σημείο x_0 όπου εφαρμόζεται το φορτίο Q , και m τη μάζα γραμμής ανά μέτρο μήκους λαμβάνουμε [με δεδομένα: $Q/y=h_{\Gamma\text{PAMMH}\Sigma}$, $U=\rho/\ell$ και Εξισ. (7)]:

$$\frac{Q}{y_0} = h_{\Gamma\text{PAMMH}\Sigma} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{E \cdot J \cdot U^3} \Rightarrow \frac{Q}{U \cdot y_0} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{EJ}{U}} \quad (45)$$

και από την Εξισ. (44):

$$m_{\Gamma\text{PAMMH}\Sigma} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = m \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{E \cdot J}{U}} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \Big|_{x=x_0} \quad (46)$$

με τον τρόπο αυτό μπορούμε να αντικαταστήσουμε την κατανεμημένη κατά μήκος της γραμμής μάζα με μία συγκεντρωμένη μάζα:

$$m' = m_{\Gamma\text{PAMMH}\Sigma} = m \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{E \cdot J}{U}} = m \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{E \cdot J \cdot \ell}{\rho}} \quad (47)$$

Από τον τύπο για τη δράση/αντίδραση της συμβατικής ανάλυσης της καταπόνησης της γραμμής (από την οποία προκύπτει το $\bar{A}_{\sigma\tau\alpha\tau}$ [Γιαννακός, 2002]):

$$R_{\max} = \frac{Q \cdot \ell}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\rho_{ολικο}}{E \cdot J \cdot \ell}} \quad (48)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση $U=\rho/\ell$, η Εξισ. (48) γίνεται:

$$\frac{Q \cdot \ell}{R_{\max}} = \left[2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{E \cdot J}{U}} \right] = \left[2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{E \cdot J \cdot \ell}{\rho}} \right] \quad (49)$$

από την οποία η Εξισ. (47) γίνεται:

$$m' = m_{\Gamma\text{PAMM}\Sigma} = m \cdot \frac{Q \cdot \ell}{R_{\max}} \quad \text{μάζα γραμμής που συμμετέχει στην κίνηση των M.A.M.} \quad (50)$$

όπου:

$$m = \rho_0 = m_{\text{rail}} + \frac{m_{\text{sleeper}}}{\ell} \quad (51)$$

οπότε η Εξισ. (50) γίνεται (χωρίς να λαμβάνεται υπ' όψη η απόσβεση):

$$m_{\Gamma\text{PAMM}\Sigma} = m \cdot \frac{Q \cdot \ell}{R_{\max}} = m \cdot \left[2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{E \cdot J \cdot \ell}{\rho_{\text{ολικο}}}} \right] = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{4EJ\ell}{\rho_{\text{ολικο}}}} \cdot \left(m_{\text{σιδ/χιάζ}} + \frac{m_{\text{στρωτήρα}}}{\ell} \right) \quad (52)$$

5 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ ΕΠΙ ΓΡΑΜΜΗΣ

Έγιναν πειραματικές μετρήσεις από τους Βρετανικούς Σιδηροδρόμους σε περίπτωση σφαλμάτων της επιφάνειας κύλισης της σιδηροτροχιάς που προκαλούν κρουστική καταπόνηση της γραμμής για ταχύτητες 160 km/h. Σύμφωνα με τους Jenkins et al. (1974) η μάζα της γραμμής ανά μονάδα μήκους για τον υπολογισμό της δύναμης P_2 δίδεται:

$$m_{TR} = \frac{3m}{2\lambda} \quad \text{where} \quad m = m_{\text{rail}} + \frac{m_{\text{sleeper}}}{\ell}, \quad \lambda = \left(\frac{k}{4EJ} \right)^{1/4}, \quad k = \frac{\rho}{\ell} \quad (53)$$

όπου η αντιστοιχία των συντελεστών κατά τους Jenkins et al., (1974) και του παρόντος είναι: (1) ο συντελεστής k ισούται με το U του παρόντος, (2) ο συντελεστής λ των Jenkins et al. δεν είναι το μήκος κύματος αλλά ισούται με το K του παρόντος (βλ. Εξισ. (10)), και συνεπώς η κατά τους Jenkins et al. μάζα γραμμής είναι:

$$m_{\Gamma\text{PAMM}\Sigma} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\lambda} = \frac{3}{2} \cdot \left(m_{\text{σιδ/χιάζ}} + \frac{m_{\text{στρωτήρα}}}{\ell} \right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{k}{4EJ}} \right)^{0.25} = \frac{3}{2} \cdot \left(m_{\text{σιδ/χιάζ}} + \frac{m_{\text{στρωτήρα}}}{\ell} \right) \cdot \left(\frac{4EJ}{k} \right)^{0.25} \quad (54)$$

6 ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Η θεωρητική ανάλυση παρουσιάσθηκε στο Γιαννακός (2001). Η σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων προς τη θεωρητική ανάλυση παρουσιάσθηκε στο Gianpakos (2007), και συνοπτικά παρουσιάζεται στο Σχήμα 6. Αφορά τη σύγκριση των Εξισ. (52) και (54). Οι μετρηθείσες επί γραμμής τιμές είναι χαμηλότερες από τις προκύπτουσες από τη θεωρητική ανάλυση. Υπάρχει απόκλιση 25% με βάση τα θεωρητικά αποτελέσματα και 33% με βάση τα πειραματικά.

Για τον υπολογισμό χρησιμοποιήθηκαν τα ακόλουθα δεδομένα:

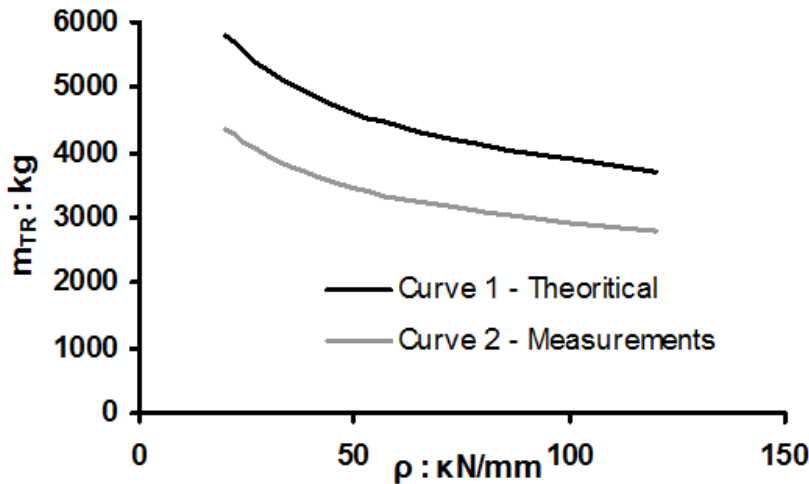
Στατικό Φορτίο τροχού 112,5 kN

σιδηροτροχιά UIC 60,

ολόσωμος στρωτήρας από προεντεταμένο σκυρόδεμα τύπου B70,

σύνδεσμος W14,

συντελεστής επιφάνειας κύλισης σιδηροτροχιάς $k=9$ (βλ. Γιαννακός, 2002),
 ύψος Κ.Β. οχήματος από κεφαλή σιδ/χιάς 1,5 m,
 ανεπάρκεια υπερύψωσης 110 mm,
 $\rho_{\text{σκυρου}}=380 \text{ kN/mm}$,
 μέγιστη ταχύτητα $V=200 \text{ km/h}$
 Μ.Α.Μ. οχήματος $m_{\text{ΜΑΜ}}=1,5 \text{ t / τροχό}$
 $\rho_{\text{υποδομής}}=40, 60, 80, 100, 250 \text{ kN/mm}$



Σχήμα 6 Απόκλιση πειραματικών και θεωρητικών αποτελεσμάτων (Giannakos, 2007)

Η διαφορά οφείλεται: (1) στο γεγονός ότι δεν ελήφθη υπόψη η απόσβεση της γραμμής ενώ στην πραγματικότητα -αν και ασθενής όπως σε όλες τις κατασκευές Πολιτικού Μηχανικού- υπάρχει, και (2) χρησιμοποιήθηκε ο συντελεστής στατικής δυσκαμψίας της γραμμής ρ_{total} σε ένα καθαρά δυναμικό φαινόμενο όπως η κίνηση συρμών αντί της δυναμικής δυσκαμψίας $h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}$. Βέβαια η επιρροή στη συνολική τιμή των Μ.Α.Μ. (οχήματος και γραμμής) κυμαίνεται μεταξύ 3.2% και 9.08%.

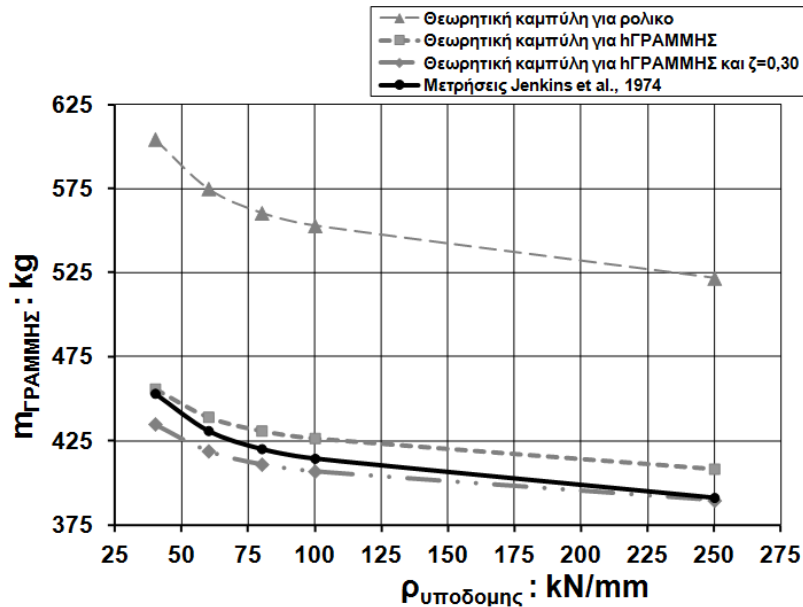
7 ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ $h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}$ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

Το θέμα παρουσιάζεται αναλυτικά στο Giannakos (2010 b). Από τη θεωρία των ταλαντώσεων με απόσβεση είναι γνωστό (Clough et al., 1993) ότι αν η περίοδος μιας αρμονικής ταλάντωσης -χωρίς απόσβεση- T_n η περίοδος μιας ταλάντωσης με απόσβεση T_D είναι:

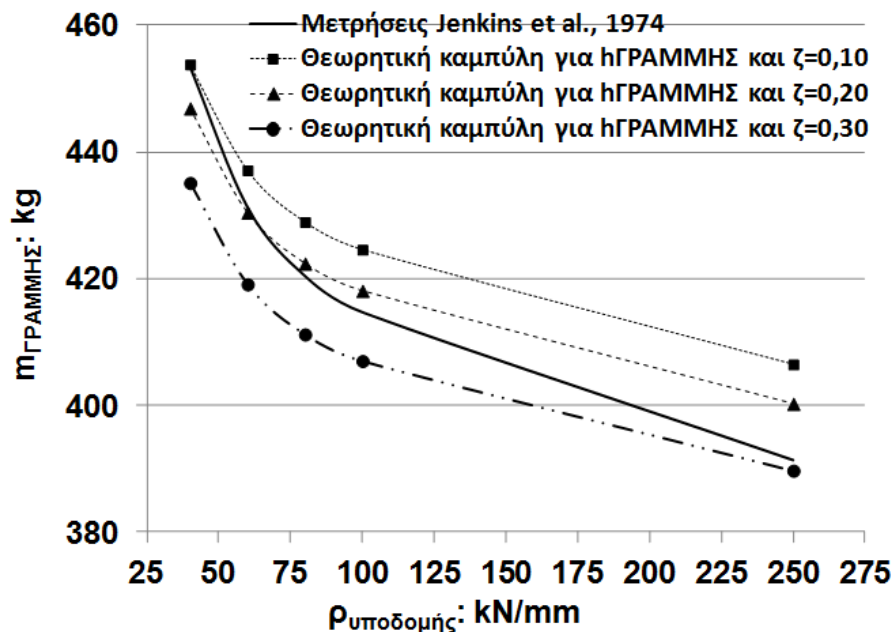
$$T_D = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (55)$$

όπου ζ είναι η αναλογία απόσβεσης ή ποσοστό κρίσιμης απόσβεσης (Chopra, 1995). Λόγω της Εξισ. (55) το μήκος κύματος σε ταλάντωση με απόσβεση γίνεται:

$$\lambda = v \cdot \frac{T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \lambda \cdot \sqrt{1-\zeta^2} = v \cdot T \quad (56)$$



Σχήμα 7 (από το Giannakos, 2010 b) Σύγκριση θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων για τον υπολογισμό της μάζας γραμμής που συμμετέχει στην κίνηση των Μη Ανηρτημένων Μαζών των οχημάτων: (1) χρησιμοποιώντας το ρολικο, (2) χρησιμοποιώντας το hΓΡΑΜΜΗΣ και (3) χρησιμοποιώντας το hΓΡΑΜΜΗΣ και συντελεστή απόσβεσης $\zeta=0,30$ σε σύγκριση με τις μετρήσεις των Jenkins et al., 1974 [Giannakos, 2010 b].



Σχήμα 8 Σύγκριση θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων για τον υπολογισμό της μάζας γραμμής που συμμετέχει στην κίνηση των Μη Ανηρτημένων Μαζών των οχημάτων: (1) χρησιμοποιώντας το hΓΡΑΜΜΗΣ και συντελεστή απόσβεσης $\zeta=0,10$, (2) χρησιμοποιώντας το hΓΡΑΜΜΗΣ και συντελεστή απόσβεσης $\zeta=0,2$, (3) χρησιμοποιώντας το hΓΡΑΜΜΗΣ και συντελεστή απόσβεσης $\zeta=0,30$ και σε σύγκριση (4) με τις μετρήσεις των Jenkins et al., 1974.

Συνεπώς το μήκος κύματος λ θα πρέπει να πολλαπλασιασθεί με τον συντελεστή

$$\sqrt{1-\zeta^2}$$

και η Εξίσ. (52) γίνεται:

$$m_{TR} = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{4EJ\ell}{h_{TR}}} \cdot \left(m_{rail} + \frac{m_{sleeper}}{\ell} \right) \cdot \sqrt{1-\zeta^2} \quad (57)$$

Η εξίσωση (57) λαμβάνει υπ' όψη τη δυναμική δυσκαμψία της γραμμής $h_{GRAMMHS}$ και το συντελεστή απόσβεσης ζ που ελήφθη $\zeta=0,3$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 7 όπως παρουσιάζεται στο Giannakos (2010 b). Η απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της θεωρητικής ανάλυσης (λαμβάνόμενα ως βάση) και των επί γραμμής μετρήσεων κυμαίνεται από +0.61% για ενδοτική/ "μαλακή" υποδομή (χαλικώδη $\rho_{υποδομής}=40\text{kN/mm}$) έως +4.19% για ανυποχώρητη -πολύ δύσκαμπτη- υποδομή (βραχώδης πυθμένας σήραγγας ή κατάστρωμα γέφυρας από σκυρόδεμα με πολύ μικρό πάχος σκύρου) στην περίπτωση που μόνο η $h_{GRAMMHS}$ λαμβάνεται υπ' όψη και αμελείται η απόσβεση. Αν ληφθεί υπ' όψη και η απόσβεση, για $\zeta=0.3$ (σύμφωνα με: [SNCF, 1981, Prud'homme, 1966] $0.2 \leq \zeta \leq 0.5$ για τη γραμμή) και η δυναμική δυσκαμψία της γραμμής $h_{GRAMMHS}$ η απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων της θεωρητικής ανάλυσης και των μετρήσεων επί γραμμής κυμαίνεται μεταξύ -4,20% για ενδοτική/ "μαλακή" υποδομή (χαλικώδη $\rho_{υποδομής}=40\text{kN/mm}$) έως -0,44% για ανυποχώρητη -πολύ δύσκαμπτη- υποδομή με $\rho_{υποδομής}=250\text{kN/mm}$ (βραχώδης πυθμένας σήραγγας ή κατάστρωμα γέφυρας από σκυρόδεμα με πολύ μικρό πάχος σκύρου). Αν ληφθεί ως βάση η τιμή των Jenkins et al., (δηλαδή ως παρονομαστής στη διαίρεση) τα ποσοστά διαφοροποιούνται λίγο.

8 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ζ ΑΠΟ 0,10 ΕΩΣ 0,30

Στο παρόν άρθρο γίνεται παραμετρική επίλυση για μεταβολή του συντελεστή ζ από 0,10 έως 0,30 -και με δυναμικό συντελεστή γραμμής $h_{GRAMMHS}$ -, και συγκρίνονται τα αποτελέσματα με τις μετρήσεις των Jenkins et al. (1974). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 8. Για διακύμανση του συντελεστή δυσκαμψίας της υποδομής $\rho_{υποδομής}$ από 40 έως 100 kN/mm, περιοχή στην οποία ανήκουν οι περισσότερες σιδηροδρομικές υποδομές διεθνώς, (περισσότερο χαρακτηριστική η τιμή $\rho_{υποδομής}=100 \text{ kN/mm}$), βλέπουμε ότι όσο η υποδομή είναι "ενδοτικότερη" ή "μαλακότερη" και συνεπώς ευεπίφορη σε "χειροτέρευση της γεωμετρίας της γραμμής" και αποσταθεροποίησή της, η τιμή της απόσβεσης είναι μικρή όπως μετρήθηκε επί γραμμής. Η απόκλιση θεωρητικών τιμών και των τιμών των μετρήσεων (Σχήμα 8) κυμαίνεται (με παρονομαστή τις μετρήσεις των Jenkins et al.) από +0,11% για $\zeta=0,1$ έως -4,02% για $\zeta=0,3$ στην περίπτωση πολύ ενδόσιμης υποδομής με $\rho_{υποδομής}=40\text{kN/mm}$ (χαλικώδης υποδομή) και από +3,85% για $\zeta=0,1$ έως -0,44% για $\zeta=0,3$ για ανυποχώρητη -πολύ δύσκαμπτη- υποδομή με $\rho_{υποδομής}=250\text{kN/mm}$ (βραχώδης πυθμένας σήραγγας ή κατάστρωμα γέφυρας από σκυρόδεμα με πολύ μικρό πάχος σκύρου).

9 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο παρόν άρθρο παρουσιάσθηκαν συνοπτικά τέσσερις μέθοδοι της διεθνούς βιβλιογραφίας για τον υπολογισμό των δράσεων επί της εσχάρας γραμμής και των στρωτήρων και συγκρίθηκαν τα αποτελέσματά τους στην παρατηρηθείσα εκτεταμένη ρηγμάτωση στρωτήρων σκυροδέματος στο ελληνικό δίκτυο. Οι Μη Ανηρτημένες Μάζες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της δυναμικής συνιστώσας των δράσεων. Η συμμετοχή της μάζας γραμμής που συμμετέχει στην κίνηση των Μ.Α.Μ. του οχήματος αποτέλεσε αντικείμενο του παρόντος άρθρου και διερευνήθηκε η επιρροή της μεταβολής της απόσβεσης της οφειλόμενης στη γραμμή όπως εκφράζεται με το συντελεστή απόσβεσης ζ και για μεταβολή του από 0,1 έως 0,3 συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της θεωρητικής ανάλυσης με τα αποτελέσματα μετρήσεων επί γραμμής. Η απόκλιση θεωρητικών τιμών και των τιμών των μετρήσεων κυμαίνεται από +0,11% για $\zeta=0,1$ έως -4,02% για $\zeta=0,3$ στην περίπτωση πολύ ενδόσιμης υποδομής με $\rho_{\text{υποδομής}}=40\text{kN/mm}$ (χαλικώδης υποδομή) και από +3,85% για $\zeta=0,1$ έως -0,44% για $\zeta=0,3$ για ανυποχώρητη -πολύ δύσκαμπτη- υποδομή με $\rho_{\text{υποδομής}}=250\text{kN/mm}$ (βραχώδης πυθμένας σήραγγας ή κατάστρωμα γέφυρας από σκυρόδεμα με πολύ μικρό πάχος σκύρου). Γενικά η θεωρητικές τιμές βρίσκονται πολύ κοντά στις μετρηθείσες και ο θεωρητικός τύπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί αξιόπιστα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Alias J. , 1984, "*La Voie Ferree*", Eyrolles, Paris, 1984
AREMA, 2005, *Manual for Railway Engineering*, Revised Version, June
Chopra A., 1995, "*Dynamics of Structures – Theory and applications to earthquake engineering*", Prentice-Hall Inc., USA
Clough R., Penzien J., "*Dynamics of Structures*", 2nd edition, Mc Graw Hill International Editions, 1993
Eisenmann J., 2004, "*Die Schiene als Tragbalken*", Eisenbahningenieur 5/2004.
Fastenrath Fritz, 1981, "*Railroad Track - Theory and Practice*", Frederic Ungar Pub.Co., New York, part 2, "*The Rail as support and Roadway, theoretical principles and practical examples*", by J. Eisenmann.
Giannakos K., 2011, "*Heavy Haul Railway Track Maintenance and Use of Resilient versus Stiff Fastenings*", approved to be published in forthcoming issue of TRR/2011 (possibly December), Washington D.C., U.S.A., January 23-27, TRB 90th Annual Meeting proceedings (AR060 "*Railway Maintenance*" Committee).
Giannakos K., 2010 a, "*Loads on track, Ballast Fouling and Life-cycle under Dynamic Loading in Railways*", Journal of Transportation Engineering, ASCE, Volume 136, Issue 12, December 2010, pp. 1075-1084.
Giannakos K., 2010 b, "*Theoretical calculation of the track-mass in the motion of unsprung masses in relation to track dynamic stiffness and damping*", International Journal of Pavement Engineering (IJPE), Special Rail Issue "*High-Speed Railway Infrastructure: Recent Developments and Performance*", volume 11, number 4, August 2010, pp. 319-330.
Giannakos K., Loizos A., 2009, "*Evaluation of actions on concrete sleepers as design loads–Influence of fastenings*", International Journal of Pavement Engineering (IJPE), November 2009, Volume 11, Issue 3 June 2010 , pages 197 – 213.

- Giannakos K., 2007, "*Influence of high-resilient fastenings on the track mass participating in the motion of unsprung masses*", Advanced Characterization of Pavement and Soil Eng. Materials, Athens, Greece, 20 – 22 June 2007, Proceedings
- Giannakos K., 2004, "*Actions on the Railway Track*", Papazissi publications, Athens 2004, www.papazisi.gr.
- Hay W., 1982, *Railroad Engineering*, John Wiley & Sons
- Jenkins H. – Stephenson J. – Clayton G – Morland G. – Lyon D., 1974, "*Incidences des parametres caracteristiques de la voie et des vehicules sur les efforts dynamiques verticaux qui se developpent entre rail et roue*", Rail International 10/1974, 682-702,
- Müller – Boruttau F. H., Ebersbach D., Breitsamter N., 1998, "*Dynamische Fahrbahnmodelle für HGV – Strecken und Folgerungen für Komponenten*", Eisenbahntechnische Rundschau, (47) Heft 11/ November
- Prud'homme A., Eriau, J., 1976, "*Les nouvelles traverses en beton de la SNCF*", RGC-2.
- Prud'homme A., 1966, "*Sollicitations statiques et dynamiques de la voie*", S.N.C.F. – Direction des Installations Fixes, 3/1966, σελ 32-34.
- Resnick R., Halliday D., 1966, "*Physics*", John Wiley & sons Inc
- Selig E., Waters J., 1994/2000, "*Track Geotechnology and Substructure Management*", Thomas Telford, 1994, reprinted 2000.
- SNCF/Direction de l' Equipement, [1981] "*Mechanique de la Voie*". Octobre.
- Winkler E., 1867, *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit (The Theory of Elasticity and Stiffness)*, H. Dominicus, Prague.
- Zimmermann H., 1941, "*Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues*", Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.
- Γιαννακός Κ., 2010, "*Επιλεγμένα Θέματα Σιδηροδρομικής*", Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Σχ. Πολιτικών Μηχανικών.
- Γιαννακός Κ., 2002, "*Δράσεις στη Σιδηροδρομική Γραμμή*", εκδ. Παπαζήση, Αθήνα, 2002, www.papazisi.gr.
- Γιαννακός Κ., 2001, "*Θεωρητικός Υπολογισμός της Μάζας Γραμμής που συμμετέχει στην Κίνηση των Μη Ανηρτημένων Μαζών των Οχημάτων και Σύγκριση με Μετρήσεις*", ΤΕΕ - Τεχνικά Χρονικά, Επιστημονική Έκδοση, 3/ 2001.
- Γιαννακός Κ., 2000, "*Διαλειτουργικότητα στους Σιδηροδρόμους: ένα μοντέλο ανάπτυξης για τη Νοτιοανατολική Ευρώπη*", διδακτορική διατριβή, ΑΠΘ, Πολυτεχνική Σχολή, επιβλέπων καθηγητής Γιώργος Γιαννόπουλος.
- Γιαννακός Κ., Βλασοπούλου Ι., 1994, "*Φόρτιση Στρωτήρων από Σκυρόδεμα και Εφαρμογή για Διμερείς Στρωτήρες Σκυροδέματος*", ΤΕΕ - Τεχνικά Χρονικά, Επιστημονική Έκδοση, Τόμος 14, 2/1994.
- Κανέλλος Σ., 1965, "*Ακουστική - Οπτική*", εκδ. Παπαδημητρόπουλος, Αθήναι.
- "*Φυσική - Τόμος 3 - Κυματική*", University of California at Berkeley, 1976, ελληνική έκδοση, εργαστήριο Φυσικής Ε.Μ.Π.
- "*Φυσική - Τόμος 1 - Μηχανική*", University of California at Berkeley, 1976, ελληνική έκδοση, εργαστήριο Φυσικής Ε.Μ.Π.